数学１　第６講　高木寛道

1　有利関数の積分

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

の不定積分を求める

仮定

$f(x)$ と $g(x)$ は共通因子を持たない。もし共通因子がある場合は約分する

$\deg f(x) = f(x)$ の次数とするとき

$$\deg g(x) < \deg f(x)$$

例：$\frac{x^3+1}{x^2} = x + \frac{1}{x^2}$

と変形する

$f(x)$ が因数分解されていないときは**実数の範囲で** 因数分解する。

$f(x) = 0$ が実数解 a をもつ →　$f(x)$ は $x - a$ で割り切れる（$x - a$ を因数にもつ）

$f(x) = 0$ が虚数解 $\alpha + i\beta (\beta \neq 0)$ をもつとき、$f(x) = 0$ はその共役数である $\alpha - i\beta$ も解にもつ

（∵虚数 p, q に対して、その共役を $\overline{p}$,$\overline{q}$ と書く

このとき $\overline{p+q} = \overline{p} + \overline{q}$、$\overline{pq} = \overline{p} \times \overline{q}$ を使う

$$\Rightarrow \{x - (\alpha + i\beta)\}\{x - (\alpha - i\beta)\}$$

で x が割り切れる。またこの式は

$$x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)$$

となり実数係数の二次方程式となる。したがって $f(x)$ は

$$f(x) = \text{（いくつかの一次式の積）} \times \text{（いくつかの二次式の積）}$$

とかける。ここでいう一次式、二次式はすべて実数係数である。

例：$x^4 + 1 = ?$

$x^4 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$

ドモアブルの公式より $x = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ は $x^4 = -1$ をみたす

（編注：ドモアブルの公式は高校旧課程、複素数平面の内容だったような $\cdots$）

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ がひとつの解

よって $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ も解。よって $x^4 + 1$ は

$$\{x-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\}\{x-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\}$$

を因子にもつ

あとは x^4+1 をこれで割り算すれば

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

2 部分分数展開する

$f(x), g(x)$ は仮定　　を満たすとする。さらに

$$f(x)=(\text{定数})\times(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_m)^{k_m}\times\{(x-b_1)^2+c_1\}^{l_1}\cdots\{(x-b_n)^2+c_n\}^{l_n}$$

($a_1\dots a_m, b_1\dots b_n\in\mathbf{R}$、$k_1\dots k_m, l_1\dots l_n\in\mathbf{N}$、$c_1\dots c_n$ は**正**の実数)

このとき、

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\text{定数}}{(x-a_1)^{k_1}}+\cdots+\frac{\text{定数}}{(x-a_1)}+\cdots+\frac{\text{定数}}{(x-a_m)^{k_m}}$$

$$+\frac{\text{一次式}}{\{(x-b_1)^2+c_1\}^{l_1}}+\cdots+\frac{\text{一次式}}{(x-b_1)^2+c_1}+\cdots+\frac{\text{一次式}}{\{(x-b_n)^2+c_n\}^{l_n}}+\cdots+\frac{\text{一次式}}{(x-b_n)^2+c_n}$$

（ここで、「定数」はすべて実数、「一次式」は一次以下の実数係数の式とする）

例：

$$\frac{x^4-4x^3+9x^2-8x+3}{(x-1)(x^2-2x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x^2-2x+2)^2}+\frac{Dx+E}{x^2-2x+2}$$

とかける。（A〜Eは実数定数）

分母を払う

$$x^4-4x^3+9x^2-8x+3=A(x^2-2x+2)^2+(Bx+C)(x-1)+(Dx+E)(x-1)(x^2-2x+2)$$

$x=1$ を代入してみる

$$1-4+9-8+3=1=A$$

$x^2-2x+2=0$ の解は $x=1\pm i$ なので $x=1+i$ を代入

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^4=(\sqrt{2})^4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^4=4(\cos\pi+i\sin\pi)=-4$$

$$2i-1=\{B(1+i)+C\}i=-B+i(B+C)\Rightarrow B+C=2,-B=-1\therefore B=C=1$$

さらに 1 回両辺を微分してから $x=1+i$ を代入することで $D=E=0$ がわかる

$$\therefore\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{x+1}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$\int\frac{g(x)}{f(x)}dx=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{x+1}{(x^2-2x+2)^2}dx$$