数学１　第５構　高木寛通

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}$$

$(\because 0 \leq \arccos x \leq \pi$ により $\sin(\arccos x) \geq 0)$
$\therefore$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

また　（$\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$ (各自証明)
（注）$(\arcsin x + \arccos x)' = 0 \Rightarrow \arcsin x + \arccos x =$ 定数（証明）x=0 とすると

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \arcsin 0 = 0$$

よって　$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (先週の別証)
以上の公式を不定積分の公式とみなせる
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
これらは不定積分として置換積分を使って計算しているはず

1　例３（双曲線関数とその逆関数）

（定義）　$\cosh x \Leftrightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \sinh x \Leftrightarrow \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
（定義）　$\tanh x \Leftrightarrow \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
性質

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$
$$1-(\tanh x)^2 = \frac{1}{(\cosh x)^2}$$

2　逆関数

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

これは $x \geq 0$ で 0 以上であり、真に増大
$x \geq 0$ の範囲での $y = \cosh x$ の逆関数を　arccosh x と書く
これを具体的に求めてみる
$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \to$ (x と y を入れ替える) $x = \frac{e^y + e^{-x}}{2}$ $(y \geq 0)$
このとき y を x で表わせばよい
$t = e^y$ とおくと

$$x = \frac{t + t^{-1}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{t^2 + 1}{2t} \Leftrightarrow t^2 + 1 = 2tx \Leftrightarrow t^2 - 2xt + 1 = 0$$

これを解くと　$t = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$

$$x = \frac{t + t^{-1}}{2}\text{において}\quad e^y \geq e^{-y}(\because y \geq 0$$

$\therefore x \leq \frac{t+t}{2} = t$
よって　$t = x + \sqrt{x^2 - 1}(x \geq 1)$
$\therefore y = \log x + \sqrt{x^2 - 1}$
$\therefore \mathsf{arccosh} x = \log x + \sqrt{x^2 - 1}$

$$(\mathsf{arccosh} x)' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 1} &= \mathsf{arccosh} x + C \\ &= \log x + \sqrt{x^2 - 1} + C \end{aligned}$$

問　$y = \mathsf{arcsinh} x$ を同様にして求めよ。またその微分を計算せよ。