数学１　第２講　高木寛通

微分 一変数の微分

$y=f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における接線の式は $y=f'(x)(x-a)+f(a)$

一変数の微分可能性の言いかえ

命題

$$f(x) \text{ が } a \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(M(x-a)+f(a))}{x-a}=0$$

となるような実数Mが存在する。

つまり $y=f(x)$ を $(a, f(a))$ の近くで非常によく近似する直線 $y=M(x-a)+f(a)$ が存在する

定義 上の命題の $y=M(x-a)+f(a)$ を $y=f(x)$ の $(a, f(a))$ での 接線 という。$M=f'(x)$ と定義する。

２変数

定義（(全）微分可能性）

$$f(x,y) \text{ が } (a,b) \text{ で（全）微分可能} \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\{f(x,y)-(M_1(x-a)+M_2(x-b)+f(a,b))\}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

となる M_1, M_2 が存在する

定義

上の定義の $z=M_1(x-a)+M_2(x-b)+f(a,b)$ を $z=f(x,y)$ の $(a,b,f(a,b))$ における 接平面 という

注意 $z=\alpha(x-a)+\beta(y-b)+c$ は (a,b,c) を通る平面

$\because$

$$\alpha(x-a)+\beta(y-b)-(z-c)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\\ z-c\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ -1\end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix}x-a\\ y-b\\ z-c\end{pmatrix} \text{ が直交}$$

定義

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ -1\end{pmatrix} \text{ のことを法線ベクトルという}$$

命題$f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば

（１）$f(x,y)$ が (a,b) で連続

（２）x,y について偏微分可能で $M_1=f_x(a,b), M_2=f_y(a,b)$

証明（１）微分可能性 (２変数) で $(x,y)\to(a,b)$ とすると、定義で

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\{f(x,y)-(M_1(x-a)+M_2(x-b)+f(a,b))\}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)}\{f(x,y)-f(a,b)\}=0 \Leftrightarrow \text{連続}$$

証明（２）微分可能性の定義で $y=b$ とすると、

$$\text{微分可能} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\{f(x,b)-(M_1(x-a)+f(a,b))\}}{\sqrt{(x-a)^2}}=0$$

となる M_1 が存在

命題により、これは $f(x,b)$ が $x=a$ で微分可能であることを示し

定義により、これは $f(x,y)$ が x について (a,b) で偏微分可能であることを示す。

$\therefore M_1=f_x(a,b)$

y についても同様

注意$f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば接平面の式は

$$z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(x-b)+f(a,b)$$

練習問題：教科書 P124〜127　例題５、問 17

追加問題

$$f(x,y)=\frac{y(3x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad (x,y)\neq(0,0)$$
$$0 \quad (x,y)=(0,0)$$

は $(0,0)$ で微分可能でないことを示せ