数学１　第９講　高木寛通

$f(x)$、何度でも微分できる関数
↓多項式近似できるとしたら？
$f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f"(0)x^2+\cdots$　n 次まで」n 次のテーラー多項式
例：$f(x)=e^x \to$ テーラー多項式

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$$

<u>後で示されること</u>：（＝テーラーの定理の系）

$$f(x)+f'(0)x+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\epsilon(x)\cdots\ *$$

（＊式は n 次のテーラー多項式に n による $\epsilon(x)$ が加わったもの）
ただし $\epsilon(x)$ は

$$\lim_{x\to 0}\frac{\epsilon(x)}{x^n}=0$$

（x^n より $\epsilon(x)$ は早く 0 に近づく。x^n より $x=0$ の近くで ”小さい ”）
＊式の n は任意に選べる

0.1　ロルの定理

$[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能 ⋯ ☆
☆の仮定（$[a,b]$ で連続）より

$$\exists p \in [a,b], \forall x \in [a,b], f(x) \leq f(p)$$
$$\exists q \in [a,b], \forall x \in [a,b], f(x) \geq f(q)$$

0.1.1　Case1

すべての $x \in [a,b]$ に対し $f(x) \leq f(p)$ となる p が $(a.b)$ にある。
$h > 0$ とする。

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p-h)-f(p)}{-h} \; (= f'(p))$$

$f(p+h) \leq f(p)$　　（$f(p)$ は最大値）

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{h} \leq 0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \leq 0$$

$f(p-h) \leq f(p)$

$$\frac{f(p-h)-f(p)}{-h} \geq 0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(p-h)-f(p)}{-h} \geq 0$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p-h)-f(p)}{-h}$ より２つの値はともに０

$\therefore f'(p) = 0$ よって $p = c$ とすればよい

0.1.2　Case2

すべての $x \in [a,b]$ に対し、$f(x) \geq f(q)$ となる q が (a,b) にある
Case1 と同様にして $f'(q) = 0$
Case1 でも Case2 でもないとき、つまり (a,b) には最大値、最小値を与える点がないとき。よって

$$最小値 = f(a) = f(b)$$
$$最大値 = f(a) = f(b)$$

$\therefore$最大値＝最小値　$\Rightarrow f(x)$ は $[a,b]$ で一定
しかし $f(x) =$ 一定のときは $[a,b]$ の中のどの点をとっても $f(x)$ は最大値かつ最小値になっているので場合分けの仮定に反する。

0.2　（ラグランジュの）平均値の定理

☆をみたす $f(x)$ に対し

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となる $c \in (a, b)$ にある

<u>証明</u>

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)$$

とすると、$g(a) = 0 = g(b)$

$g(x)$ にロルの定理を適用することができて $g'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ がある

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

0.3　コーシーの平均値の定理

$f(x), g(x)$ を☆を満たす関数とする。さらに

$$f(a) \neq f(b) \text{ かつ } \forall x \in (a, b)\ ,\ f'(x) \neq 0$$

と仮定

ある $c \in (a, b)$ があって

$$\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}$$

注：$f(x) = x$ ととればラグランジュの平均値の定理になる

<u>証明</u>

$$h(x) = (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$$

注：↑ロルの定理と相性のいい関数ならコレでなくてもよい

$$h(a) = h(b) = 0 \text{ より、} h'(c) = 0 \text{ となる } c \in (a, b) \text{ にある}$$

$$h'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$$

よって比をとれば

$$\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}$$

コーシーの平均値の定理で $f(a) = g(a) = 0$ のとき

$$\frac{g(b)}{f(b)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}$$

となる $c \in (a, b)$ がある

0.4　テーラーの定理

$f(x)$ を $|x| < \mathbf{R}$ において何回でも微分可能な関数とする
$0 < |b| < \mathbf{R}$ となる b に対して、ある 0 と b の間の数 $c \neq 0, b$ があって
（つまり $b > 0$ のとき $c \in (a, b)$、 $b < 0$ のとき $c \ni (a, b)$）

$$f(b) = f(0) + f'(0)b + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)b^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)b^{n+1}$$

$$\left(\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)b^{n+1}\text{は　'誤差　'と考える}\right)$$

<u>証明</u>
$b > 0$ のときのみ示す

$$F(x) = f(x) - \{f(0) + f'(0)x + \cdots \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n\}$$

$F(x)$ は $[0, b]$ で連続、$(0, b)$ で微分可能
コーシーの平均値の定理を $[a, b]$ において $F(x)$ と x^{n+1} に適用

$$\frac{F(b) - F(0)}{b^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{F'(c_1)}{(n+1)c_1^n}$$

となる $c_1 \in (a, b)$ にある

$$F'(x) = f'(x) - \{f'(0) + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n)}(0)x^{n+1}\}$$

$[0, c]$ において $F'(x)$ と $(n+1)x^n$ にコーシーの平均値の定理を適用

$$\frac{F'(c_1) - F'(0)}{(n+1)c_1^n - (n+1)0^n} = \frac{F''(c_2)}{(n+1)nc_2^{n-1}}$$

となる $c_2 \in (a, b)$ にある
第 10 講に続く ⋯