数学１　第８講　高木寛通

0.1　関数の多項式近似（テーラーの定理）

introduction　極限問題

例

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+3}{x^3+2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=?$$

$$\underline{e^x>\frac{1}{(n+1)!}}x^{n+1}\ \text{を使えば}$$

$$0<\frac{x^n}{e^x}<(n+1)!\frac{x^n}{x^{n+1}}$$

$$x\longrightarrow\infty \qquad (n+1)!\frac{1}{x}\ \longrightarrow 0$$

よってはさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

下線部の式により（多項式）/（多項式）の極限の問題になった

関数を多項式で近似する ことで極限の問題を（多項式）/（多項式）の問題にしたい

特別な場合 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ が $x=a$ の近くで１次式で近似

・$f(x)$ を何度でも微分できる関数とする。このとき

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

となる多項式を求めてみる。（a_i は実数）

両辺を微分していくことで $a_0.a_1,\ldots$ を決めていく

$$
\begin{array}{rl}
 & x=0 \quad f(0)=a_0=\frac{1}{0!} \\
\text{微分して} & x=0 \quad f'(0)=a_1=\frac{1}{1!}f'(0) \\
\text{二回微分して} & x=0 \quad f''(0)=2a_2 \quad a_2=\frac{1}{2!}f''(0) \\
\text{三回微分して} & x=0 \quad f^{(3)}(0)=3!a_3 \quad a_3=\frac{1}{3!}f^{(3)}(0) \\
\text{四回微分して} & x=0 \quad f^{(4)}(0)=4!a_4 \quad a_4=\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)
\end{array}
$$

$$
☆ \quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+\cdots\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots
$$

定義：☆式の n 次までの式のことを $f(x)$ の n 次のテーラー多項式という

等式☆の２つの正当化 (これがしばらくの目標)

（１）$f(x)=$（n 次のテーラー多項式）+(’使いやすい ’誤差）という表示を求める (テーラーの定理)

（２）

$$
f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \quad \text{と表示してしまう}
$$

・いろいろな関数のテーラー多項式

<u>例１</u>

$$
f(x)=e^x\ ,\ f^{(n)}(x)=e^x\ ,\ f^{(n)}(0)=1
$$

よってテーラー多項式は

$$
1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n
$$

<u>例２</u>

$$
f(x)=\log(x+1) \leftarrow x=0 \text{ で定義されないので } x+1 \text{ にずらした}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
f(0) & = & 0\ ,\ f'(0)=\left.\frac{1}{x+1}\right|_{x=0}=1 \\
f''(0) & = & -(x+1)^{-2}\Big|_{x=0}=-1 \\
f^{(3)}(0) & = & 2(x+1)^{-3}\Big|_{x=0}=2=2! \\
f^{(4)}(0) & = & -2\times 3(x+1)^{-4}\Big|_{x=0}=-3! \\
\vdots & & \\
f^{(n)}(0) & = & (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{array}
$$

テーラー多項式は

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)! = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

より

$$x - x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

<u>例３ $\sin x$ $\cos x$</u>

$$f(x) = \sin x \text{ とする}$$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(0) &= \cos x|_{x=0} = 1 \\
f"(0) &= -\sin x|_{x=0} = 0 \\
f^{(3)}(0) &= -\cos x|_{x=0} = -1 \\
f^{(4)}(0) &= \sin x|_{x=0} = 0 \\
f^{(5)}(0) &= \cos x|_{x=0} = 1
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots$$

$$\begin{aligned}
\text{奇数次の項} &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\
\text{偶数次の項} &= 0
\end{aligned}$$

問　$\cos x$ のテーラー展開を求めよ（解答はノートの最後）

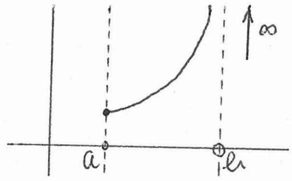
0.2　平均値の定理（復習）

テーラーの定理を証明するために平均値の定理を証明する。ただし次の定理は自明であるとする。

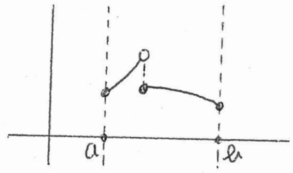
<u>定理</u>　（最大値・最小値の定理）（Ｐ３６）

閉区間 $[a, b]$ 上で連続 な関数 $f(x)$ は $[a, b]$ において最大値と最小値を持つ。ここでいう最大値とは、$a \leq p \leq b$ があって、すべての $a \leq x \leq b$ に対して $f(x) \leq f(p)$ となる $f(p)$ のこと

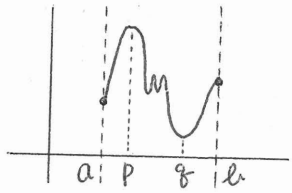
$[a,b)$ でしか定義されていない
最大値はない
（定義域の中で最大値なし）



最大値がない
（連続でないため最大値なし）



$f(p)$ 最大値
$f(q)$ 最小値
＊連続であれば微分可能
である必要はない

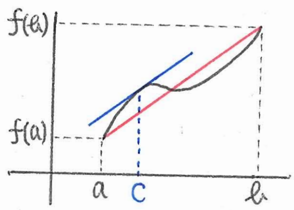


定理　（ロルの定理）
$f(x)$ を $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能とする。もし $f(a)=f(b)$ ならば、ある $c \in (a,b)$ があって $f'(c)=0$ となる

定理　（平均値の定理）
$f(x)$ を $[a,b]$ で連続、(a,b) で連続とすると、ある $c \in (a,b)$ に対して

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となる



$\because$

$$g(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}$$

とおいて $g(x)$ にロルの定理を使う。（詳細は第9講で）
（問いの答え）

$$\begin{aligned}\text{偶数次の項} &= \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\\ \text{奇数次の項} &= 0\end{aligned}$$

今回の記号の意味（念のため）
$f^n(x)$：$f(x)$ を n 回微分（できるものとして微分）したもの
$f(x)|_{x=a}$：$f(x)$ に $x=a$ を代入したもの（つまり $f(a)$）
$[a,b]$：閉区間 a,b。対象とする変数が x であるとき、x のとりうる範囲が $a \le x \le b$ ということ。
(a,b)：開区間 a,b。上に同じく、$a<x<b$　ということ。