数学１　第７講　高木寛通

有理関数の積分の一般化

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k}$$
$$\int \frac{x+b}{\{(x-c)^2+d\}^l}dx$$

を求めてみる（$d>0$）

$$= \begin{cases} \log|x-a| & k=1 \\ -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} & k \geq 2 \end{cases}$$

$$= \int \frac{(x-c)+c+b}{\{(x-c)^2+d\}^l}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-c)}{\{(x-c)^2+d\}^l}dx + \int \frac{c+d}{\{(x-c)^2+d\}^l}dx \cdots (*)$$

$$I_l = \int \frac{c+d}{\{(x-c)^2+d\}^l}dx \quad \text{を求める}$$

I_l についての漸化式を作る

$$I_l = \int \frac{(x-c)'}{\{(x-c)^2+d\}^l} = \frac{x-c}{\{(x-c)^2+d\}^l} - \int (x-c)\left(\frac{1}{\{(x-c)^2+d\}^l}\right)' dx$$
$$= \cdots + \int \frac{2l\{(x-c)^2+d\}-2ld}{\{(x-c)^2+d\}}dx = \cdots + 2l\int \frac{dx}{\{(x-c)^2+d\}^2} - 2ld\int \frac{dx}{\{(x-c)^2+d\}^{l+1}}$$
$$I_l = \frac{x-c}{\{(x-c)^2+d\}} + 2lI_l - 2ldI_{l+1} \Rightarrow I_{l+1} = \frac{2l-1}{2ld}I_l + \frac{1}{2ld}\frac{x-c}{\{(x-c)^2+d\}^l}$$

＊式の変形には $(x-c)'=1$ と部分積分を用いる
（第６講最終行から）

$$\int \frac{x+1}{(x^2-2x+2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{\{(x-1)^2+1\}^2}dx + 2\underline{\int \frac{dx}{\{(x-1)^2+1\}^2}}$$

下線部に $l=1$ として漸化式を適用

$$\int \frac{dx}{\{(x-1)^2+1\}^2} = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\frac{x-1}{(x-1)^2+1} = I_2$$

I_1 は実際に計算

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$

$t=x-1$ とおくと $dt=dx$ より

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t = \arctan(x-1)$$

(参考)

$$\int \frac{m(x)'}{m(x)^k}dx = \begin{cases} \log|m(x)| & k=1 \\ -\frac{1}{k-1}\frac{1}{m(x)^{k-1}} & k \geq 2 \end{cases}$$