数学1　第4講　高木寛通

1　一変数の逆関数

<u>定義</u>
$y=f(x)$ を関数とする。$f(x)$ が（ある範囲で）真に増大（←常に増加）

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$$

真に減少も同様
<u>定義</u>
真に増大または減少している関数 $f(x)$ については x にたいして y が決まるだけでなく y を決めれば x も決まる
この y に対して x を決める関数を f の逆関数といい f^{-1} と書く
<u>命題</u>
（１）$f(x)$ が連続 $\Rightarrow$ f^{-1} も連続
（２）$f * f^{-1}(x) = x$, $f^{-1} * f(x) = x$　（合成記号を $*$ とする）

$$(3)\ (f^{-1})'(x) = \frac{\ }{f'(f^{-1}(x))}$$

＊（３）は任意の関数を図に取り、
$y=x$ に対して対称にした
図を考えるとわかる

<u>例１</u>（指数関数と対数関数）
e の定義としては $(e^x)' = e^x$ を満たす値。
指数関数の性質　$e^{x+y} = e^x \times e^y$,　　$\mathbf{R}$ 全体で真に増大
$y=e^x$ の逆関数を $y=\log x$ と書く（対数関数）

$$\log x + \log y = \log xy$$

$$(\log x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} - \frac{1}{e^{\log x}} - \frac{1}{f * f^{-1}(x)} - \frac{1}{x}$$

$\log x$ は $f(x)$ の逆関数。（$f^{-1}(x) = \log x$）

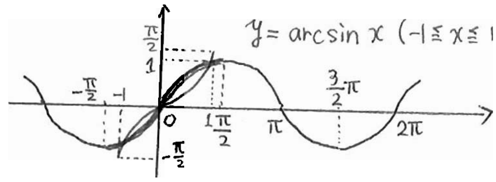
<u>例２</u>（三角関数と逆三角関数）

$y = \sin x(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$

≀ 逆関数

$y = \sin^{-1} x(\neq \frac{1}{\sin x})$ または

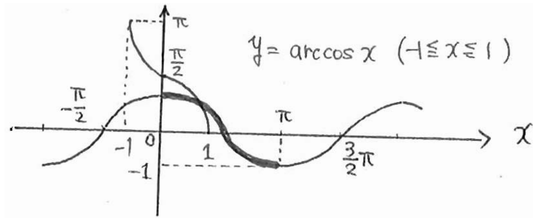
$\arcsin x$ と書く



$y = \cos x \ (0 \leq x \leq \pi)$

≀　逆関数

$y = \arccos x \ (-1 \leq x \leq 1)$



問

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

を証明せよ（類題：Ｐ１５例題４、問７～９）

証明：$y = \arcsin x$ とおくと $x = \sin y(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$～☆)

示すべき式は

$$y + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

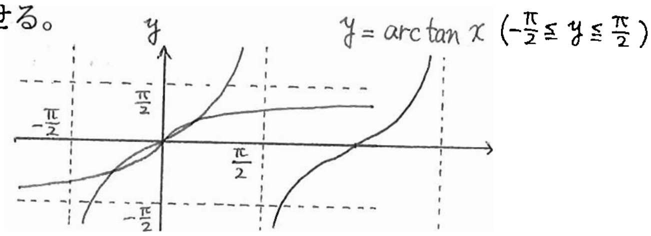
$$\Leftrightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - y$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\frac{\pi}{2} - y) = x \text{ かつ } \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \pi$$

は $x = \sin y$ に同じ、　は☆より示せる。

$y = \tan x$

$t = \arctan x \ (-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$



また、

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$(f(x) = \sin x \ , \ f'(x) = \cos x \ , \ f^{-1}(x) = \arcsin x)$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}$$

$$\because -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } \cos(\arcsin x) \geq 0$$

$$\therefore (\arcsin x)' = \frac{}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$

$\log x$ は $f(x)$ の逆関数。($f^{-1}(x) = \log x$)

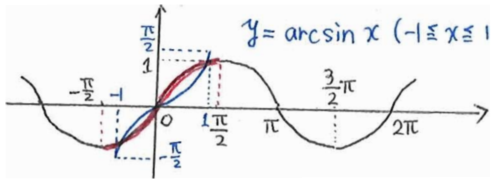
<u>例２</u>（三角関数と逆三角関数）

$y = \sin x(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$

≀ 逆関数

$y = \sin^{-1} x(\neq \frac{1}{\sin x})$ または

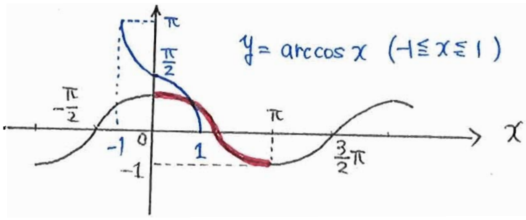
$\arcsin x$ と書く



$y = \cos x$ $(0 \leq x \leq \pi)$

≀　逆関数

$y = \arccos x$ $(-1 \leq x \leq 1)$



問

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

を証明せよ（類題：Ｐ１５例題４、問７～９）

証明：$y = \arcsin x$ とおくと $x = \sin y(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$～☆)

示すべき式は

$$y + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

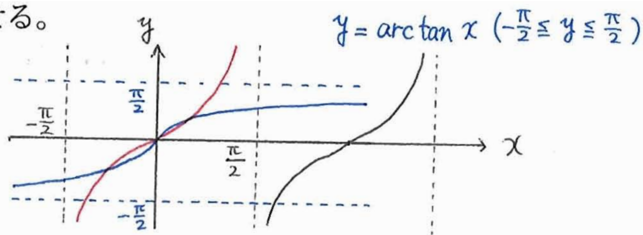
$$\Leftrightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - y$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\frac{\pi}{2} - y) = x \text{ かつ } \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \pi$$

は $x = \sin y$ に同じ、　は☆より示せる。

$y = \tan x$

$t = \arctan x$ $(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$



また、

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$(f(x) = \sin x\ ,\ f'(x) = \cos x\ ,\ f^{-1}(x) = \arcsin x)$$

$$\cos(\arcsin x) = \ '1 - \sin^2(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\because -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \text{より} \cos(\arcsin x) \geq 0$$

$$\therefore (\arcsin x)' = \frac{}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$