数学１　第３講　高木寛通

定義$f(x,y)$ が (a,b) で（全）微分可能

$$\Leftrightarrow M_1, M_2 \in \mathbf{R} \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-\{M_1(x-a)+M_2(y-b)+f(a,b)\}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

命題
$f(x,y)$ が (a,b) で 微分可能ならば
（１）$f(x,y)$ は (a,b) で微分可能
（２）$f(x,y)$ は (a,b) で x,y について偏微分可能であり、$M_1 = f_x(a,b)$、$M_2 = f_y(a,b)$
$f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば $(a,b,f(a,b))$ での接平面の式は

$$z = f_(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

1　合成関数の偏微分（連鎖律）

教科書 P128〜130
一変数$f(x(u))$（x が u の関数であるとき）

$$\{f(x(u))' = f'(x(u))x'(u)\}$$

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{du}$$

定理
設定{ z=f(x,y),x=x(u,v),y=y(u,v) }
そして次を 仮定
（１）$f(x,y)$ は (a,b) で微分可能
（２）$a = x(p,q), b = y(p,q)$ となる (p,q) において

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}\text{が存在}$$

結論：$(u,v)=(p,q)$ において $f(x(u,v),y(u,v))$ は u,v について偏微分可能であり

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

これは行列を使って

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \text{と書ける}$$

(上の２行２列行列のことを Jacobian 行列という)

<u>証明</u>

(a,b) で微分可能

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-\{f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b)\}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

u についての公式のみ示す

$$\lim_{(x(p+h,q),y(p+h,q))\to(a,b)}\frac{f(x(p+h,q),y(p+h,q))-\{f_x(a,b)(x(p+h,q)-a)+f_y(y(p+h,q)-b)+f(a,b)\}}{\sqrt{(x(p+h,q)-a)^2+(y(p+h,q)-b)^2}}=0$$

lim の中身の分母分子を h で割る

$$\frac{\text{分母}}{h}=\sqrt{\frac{(x(p+h,q)-a)^2+(y(p+h,q)-b)^2}{h^2}}=\sqrt{\left(\frac{x(p+h,q)-a}{h}\right)^2+\left(\frac{(y(p+h,q)-b)}{h}\right)^2}$$

$h\to 0$ とするとこれは $\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial u}(p,q))^2+(\frac{\partial y}{\partial u}(p,q))^2}$ に収束

$$\frac{\text{分子}}{h}=\frac{f(x(p+h,q),y(p+h,q))-f(a,b)}{h}-\frac{f_x(a,b)(x(p+h,q)-a}{h}-\frac{f_y(y(p+h,q)-b)}{h}$$

ここで $h\to 0$ とすると

$$\frac{f(x(p+h,q),y(p+h,q))-f(a,b)}{h}\text{は}\frac{\partial f}{\partial u}\text{の }(p,q)\text{ での値}$$

$$\frac{f_x(a,b)(x(p+h,q)-a}{h}\to f_x(a,b)x_u(p,q),\ \frac{f_y(y(p+h,q)-b)}{h}\to f_y(a,b)y_u(p,q)$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x(p+h,q),y(p+h,q))-f(a,b)}{h}=f_x(a,b)x_u(p,q)+f_y(a,b)y_u(p,q)$$