①

数I演習問題（１４，１５，１６組）
5月18日実施
テーマ:逆関数

担当:高木寛通 (たかぎひろみち)

(1)

$$\mathrm{Arcsin}\, x = \mathrm{Arctan}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

を示せ.

(2)

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

を示せ (定義に戻って実際に計算するだけ.)

(3)

$$T_n(x) := \begin{cases} \cos(n\,\mathrm{Arccos}\, x) & |x| \le 1 \\ \cosh(n\,\mathrm{Arccosh}\, x) & x \ge 1 \\ (-1)^n \cosh(n\,\mathrm{Arccosh}\, |x|) & x \le -1, \end{cases}$$

$$S_n(x) := \begin{cases} \frac{\sin(n\,\mathrm{Arccos}\, x)}{\sqrt{1-x^2}} & |x| \le 1 \\ \frac{\sinh(n\,\mathrm{Arccosh}\, x)}{\sqrt{x^2-1}} & x \ge 1 \\ (-1)^{n-1} \frac{\sinh(n\,\mathrm{Arccosh}\, |x|)}{\sqrt{x^2-1}} & x \le -1 \end{cases}$$

とおく.

(3-1) $n = 0, 1, 2, 3$ に対して $T_n(x)$ を具体的に計算せよ (まずは $|x| \le 1$ で計算してみよ. その計算法が $x \ge 1$ および $x \le -1$ でも通用するはずである. なぜか？)

(3-2) S_n, T_n を (x の多項式) $\times S_{n-1}$ + (x の多項式) $\times T_{n-1}$ と表示せよ (加法定理). (これで T_n も S_n も実は多項式であることを確認せよ. 厳密には帰納法で示す. T_n のことをチェビシェフの多項式と言う.)

(3-3) 余力のある人は, S_n, T_n の連立一次漸化式を解け (2×2 行列の n 乗の計算をする必要がある).

Date . . No.

数学I 演習 5/18 日分 ②

(1)

$$\mathrm{Arc}\sin x = \theta \qquad \mathrm{Arc}\tan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \varphi$$

とすると

$$x = \sin\theta \quad \cdots ① \qquad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \tan\varphi \quad \cdots ②$$

ところで、θ の定義より

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \cos\theta > 0$$

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

よって ② より $\tan\theta = \tan\varphi$

$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\theta = \varphi \qquad \therefore \mathrm{Arc}\sin x = \mathrm{Arc}\tan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

//

(2)

$$\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}+e^{x-y}+e^{-x+y}}{4} + \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}-e^{x-y}-e^{-x+y}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} = \cosh(x+y)$$

③

$\therefore \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

また,

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$= \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}+e^{x-y}-e^{-x+y}}{4} + \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}-e^{x-y}+e^{-x+y}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y)$$

$\therefore \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ //

(3)

まず, (2)の結果と,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

をくり返し使うことにより,

$$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$$
$$\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x \quad \cdots\cdots (\star)$$

であることがわかる。

(i) $n=0$ のとき

$\cos 0 = 1$

$\cosh 0 = 1$ であるから

$T_0(x) = 1$

Date . . No.

④

よって

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

(iv) $n = 3$

・ $|x| \leq 1$

$$T_3(x) = \cos(3\,\mathrm{Arccos}\,x)$$
$$= 4\cos^3(\mathrm{Arccos}\,x) - 3\cos(\mathrm{Arccos}\,x)$$
$$= 4x^3 - 3x$$

(倍角公式

・ $x \geq 1$

$$T_3(x) = \cosh(3\,\mathrm{Arccosh}\,x)$$
$$= 4\cosh^3(\mathrm{Arccosh}\,x) - 3\cosh(\mathrm{Arccosh}\,x)$$
$$= 4x^3 - 3x$$

($\because$ (☆))

・ $x \leq -1$

$$T_3(x) = -\cosh(3\,\mathrm{Arccosh}\,|x|)$$
$$= -(4|x|^3 - 3|x|)$$
$$= -\{4(-x)^3 - 3(-x)\}$$
$$= 4x^3 - 3x$$

以上より

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

(ii) $n=1$

・$|x| \leq 1$ のとき

$T_1(x) = \cos(\mathrm{Arccos}\, x) = x$

・$x \geq 1$ のとき

$T_1(x) = \cosh(\mathrm{Arccosh}\, x) = x$

・$x \leq -1$ のとき

$$\begin{aligned} T_1(x) &= -\cosh(\mathrm{Arccosh}|x|) \\ &= -\cosh(\mathrm{Arccosh}(-x)) \\ &= -(-x) = x \end{aligned}$$

以上より $\quad T_1(x) = x$

(iii) $n=2$

・$|x| \leq 1$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \cos(2\mathrm{Arccos}\, x) \\ &= 2\cos^2(\mathrm{Arccos}\, x) - 1 \quad (\text{倍角公式}) \\ &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

・$x \geq 1$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \cosh(2\mathrm{Arccosh}\, x) \\ &= 2\cosh^2(\mathrm{Arccosh}\, x) - 1 \quad (\because (☆)) \\ &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

・$x \leq 1$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \cosh(2\mathrm{Arccosh}|x|) \\ &= 2|x|^2 - 1 = 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

(3-2)

$T_n(x)$, $S_n(x)$ は、$|x| \leq 1$ の場合のみ求めれば、それは $|x| \geq 1$ の場合も同じになることに注意する。

よって以下では、$|x| \leq 1$ で考える。

加法定理により、

$\cos (n+1) \mathrm{Arccos}\, x$

$= \cos(\mathrm{Arccos}\, x) \cos n(\mathrm{Arccos}\, x) - \sin(\mathrm{Arccos}\, x) \sin n(\mathrm{Arccos}\, x)$

$= x \cdot T_n(x) - \sqrt{1-x^2} \cdot \{\sqrt{1-x^2}\, S_n(x)\}$

$= x T_n(x) + (x^2-1) S_n(x)$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2} \\ \sin n(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2}\, S_n(x) \end{array}\right]$$

よって、 $T_{n+1}(x) = x T_n(x) + (x^2-1) S_n(x)$

同様に、

$\sin (n+1) \mathrm{Arccos}\, x$

$= \sin(\mathrm{Arccos}\, x) \cos n(\mathrm{Arccos}\, x) + \sin n(\mathrm{Arccos}\, x) \cos(\mathrm{Arccos}\, x)$

$= \sqrt{1-x^2}\, T_n(x) + (\sqrt{1-x^2}\, S_n(x)) \cdot x$

$= \sqrt{1-x^2} \{ T_n(x) + x S_n(x) \}$

$$\therefore\ S_{n+1}(x) = \frac{\sin(n+1)\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= T_n(x) + x S_n(x)$$

以上より

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = x T_n(x) + (x^2-1) S_n(x) \\ S_{n+1}(x) = T_n(x) + x S_n(x) \end{cases}$$

//

(3-3)

(2) より

$$\begin{pmatrix} T_{n+1}(x) \\ S_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_n(x) \\ S_n(x) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} T_0(x) \\ S_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ であるから

$$\begin{pmatrix} T_n(x) \\ S_n(x) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって A^n を求めればいい。

まず，ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 2xA + E = O \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，

$$\varphi(\theta) = \theta^2 - 2x\theta + 1 \quad \text{という}$$

多項式を考える。

$$\varphi(\theta) = 0 \iff \theta = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

である。 $\alpha = x + \sqrt{x^2-1}$ ， $\beta = x - \sqrt{x^2-1}$ とおく。

θ^n を $\varphi(\theta)$ でわった商を $Q(\theta)$，
あまりを $a_n\theta + b_n$ とすると

$$\theta^n = \varphi(\theta)Q(\theta) + a_n\theta + b_n \quad \cdots\cdots ②$$

$\theta = \alpha, \beta$ を代入して，

$$\begin{cases} \alpha^n = \alpha a_n + b_n \\ \beta^n = \beta a_n + b_n \end{cases}$$

よって $a_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ $\quad b_n = \dfrac{\alpha\beta^n - \alpha^n\beta}{\alpha - \beta}$

② において，(形式的に) $\theta = A$ とすると，

① により，

$$A^n = a_nA + b_nE \quad \text{とわかる。}$$

よって，

$$A^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\begin{pmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & x \end{pmatrix} + \frac{\alpha\beta^n - \alpha^n\beta}{\alpha - \beta}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = x + \sqrt{x^2-1}$, $\beta = x - \sqrt{x^2-1}$ を代入して,

$$A^n = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2\sqrt{x^2-1}} \begin{pmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})^n - (x+\sqrt{x^2-1})^n(x-\sqrt{x^2-1})}{2\sqrt{x^2-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} & \sqrt{x^2-1} \cdot \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} \\ \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2\sqrt{x^2-1}} & \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T_n(x) \\ S_n(x) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ であったから

$$\begin{cases} T_n(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} \\ S_n(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

//

(別解)

$\boldsymbol{x} \in M(2,1,\mathbb{R})$ とする。

固有方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ $\left(\boldsymbol{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

を考えると、

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \vec{0} \cdots\cdots (※)$$

もし $\det(A - \lambda E) \neq 0$ なら、

$(A - \lambda E)^{-1}$ が存在するから、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり不適

よって、$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} x - \lambda & x^2 - 1 \\ 1 & x - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0$ $\therefore \lambda = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$

以下、$\alpha = x + \sqrt{x^2 - 1}$, $\beta = x - \sqrt{x^2 - 1}$

とおく。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とおき、(※)を解く。

- $\lambda = \alpha$ のとき

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{x^2 - 1} & x^2 - 1 \\ 1 & -\sqrt{x^2 - 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解の1つは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 - 1} \\ 1 \end{pmatrix}$

・ $\lambda = \beta$ のとき,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{x^2-1} & x^2-1 \\ 1 & \sqrt{x^2-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

解の1つは $\quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2-1} \\ -1 \end{pmatrix}$

(なお, α, β を 固有値, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を 固有ベクトル という)

さて,

$$X = (\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2-1} & \sqrt{x^2-1} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ とすると

(☆) により

$$A(\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}(\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2)$$

つまり. $\quad AX = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} X$

$$\therefore \quad X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

両辺を n 乗して.

$$X^{-1}A^nX = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

ここで $\quad X^{-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{x^2-1} \\ 1 & -\sqrt{x^2-1} \end{pmatrix}$

Date . . No.

(12)

よって、

$$A^n = X\begin{pmatrix}\alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}X^{-1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\begin{pmatrix}\sqrt{x^2-1} & \sqrt{x^2-1} \\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(x+\sqrt{x^2-1})^n & 0 \\ 0 & (x-\sqrt{x^2-1})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{x^2-1} \\ 1 & -\sqrt{x^2-1}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{2} & \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} \\ \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{2\sqrt{x^2-1}} & -\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2\sqrt{x^2-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{x^2-1} \\ 1 & -\sqrt{x^2-1}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} & \sqrt{x^2-1}\cdot\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} \\ \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2\sqrt{x^2-1}} & \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}\end{pmatrix}$$

以下同様 //.

Date . . No.

数I 練習問題 5/18 日分 ⑬

(1)

(a) $\cos(\mathrm{Arcsin}\, x) = \sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2}$

を示せ

(b) $\mathrm{Arccos}(-x) = \pi - \mathrm{Arccos}\, x$

を示せ

(2)

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

を示せ

(b) $\cosh 2x$, $\cosh 3x$ を.

$\cosh x$ を用いてあらわせ

(加法定理を使ってよい)

(3)

(a) $-1 < x < 1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ とする。

$$T_n(x) = \cos n(\mathrm{Arccos}\, x)$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin n(\mathrm{Arccos}\, x)$$

とおく。

このとき $\begin{cases} T_n(x) \text{ は } x \text{ についての } n \text{ 次多項式} \\ S_n(x) \text{ は } x \text{ についての } (n-1) \text{ 次多項式} \end{cases}$

であることを示せ.

(b)

$m, n \in \mathbb{N}$ とする。このとき

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\, T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n). \end{cases}$$

を示せ。

解答

(1)
(a) $-\frac{\pi}{2} \leqq \mathrm{Arcsin}\, x \leqq \frac{\pi}{2}$ なので,

$\cos(\mathrm{Arcsin}\, x) \geqq 0$

$\therefore \cos(\mathrm{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-(\sin \mathrm{Arcsin} x)^2} = \sqrt{1-x^2}$

また, $0 \leqq \mathrm{Arccos}\, x \leqq \pi$ なので,

$\sin(\mathrm{Arccos}\, x) \geqq 0$

$\therefore \sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1-(\cos \mathrm{Arccos} x)^2} = \sqrt{1-x^2}$.

以上より

$\cos(\mathrm{Arcsin}\, x) = \sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2}$ //

(b)
$\mathrm{Arc}\cos(-x) = \theta$ とおくと.

$-x = \cos\theta$

$\therefore x = -\cos\theta = \cos(\pi-\theta)$

ここで $0 \leqq \mathrm{Arccos}(-x) = \theta \leqq \pi$ なので,

$0 \leqq \pi - \theta \leqq \pi$ である。

よって $\mathrm{Arccos}\, x = \pi - \theta$

$\therefore \mathrm{Arccos}(-x) = \theta = \pi - \mathrm{Arccos}\, \theta$ //

(2)
(a)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$
$$= 1$$

$$\therefore \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

(b)

$$\cosh 2x = \cosh(x + x)$$
$$= \cosh x \cosh x + \sinh x \sinh x \quad (\because \text{加法定理})$$
$$= \cosh^2 x + \sinh^2 x$$
$$= 2\cosh^2 x - 1 \quad (\because (a))$$

よって $\underline{\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1}$

$$\cosh 3x = \cosh(x + 2x)$$
$$= \cosh x \cosh 2x + \sinh x \sinh 2x \quad (\because \text{加法定理})$$
$$= \cosh x(2\cosh^2 x - 1) + \sinh x(\cosh x \sinh x + \cosh x \sinh x)$$
$$= 2\cosh^3 x - \cosh x + 2\cosh x \sinh^2 x$$
$$= 2\cosh^3 x - \cosh x + 2\cosh x(\cosh^2 x - 1)$$
$$= 4\cosh^3 x - 3\cosh x$$

よって $\underline{\cosh(3x) = 4\cosh^3 x - 3\cosh x}$

であることを，数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき，

$T_1(x) = \cos(\mathrm{Arccos}\, x) = x$.

$$S_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\mathrm{Arccos}\, x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} = 1 \quad (\because (1)(a))$$

なので (☆) は正しい。

(ii) $n=k$ のとき (☆) が正しいとする。

このとき

$$\begin{cases} T_{k+1}(x) = xT_k(x) + (x^2-1)S_k(x) \\ S_{k+1}(x) = T_k(x) + xS_k(x) \end{cases}$$

だから，$T_{k+1}(x)$ は $(k+1)$ 次で，その $(k+1)$ 次の係数は正，

$S_{k+1}(x)$ は n 次で，その k 次の係数は正

よって (☆) は $n=k+1$ でも正しい。

よって (☆) はすべての n で正しい。

以上で題意は示された。 //

(3)
(a)
まず,

$$T_{n+1}(x) = \cos (n+1)\mathrm{Arccos}\, x$$

$$= \cos(\mathrm{Arccos}\, x)\cos n(\mathrm{Arccos}\, x) - \sin(\mathrm{Arccos}\, x)\sin n(\mathrm{Arccos}\, x)$$

$$= x \cdot T_n - \sqrt{1-x^2} \cdot \left\{\sqrt{1-x^2}\, S_n\right\} \quad (\because (1)(a))$$

$$= x T_n + (x^2-1) S_n.$$

$$S_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n+1)\mathrm{Arccos}\, x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{\cos(\mathrm{Arccos}\, x)\sin n(\mathrm{Arccos}\, x) + \cos n(\mathrm{Arccos}\, x)\sin(\mathrm{Arccos}\, x)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{x \cdot \sqrt{1-x^2}\, S_n(x) + \sqrt{1-x^2}\, T_n(x)\right\}$$

$$= T_n(x) + x S_n(x)$$

よって

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = x T_n + (x^2-1) S_n(x) \\ S_{n+1}(x) = T_n(x) + x S_n(x) \end{cases}$$

これを用いて,

$$\begin{cases} T_n(x) \text{ は } x \text{ の } n \text{ 次多項式で, 最高次の係数は正} \\ S_n(x) \text{ は } x \text{ の } (n-1) \text{ 次多項式で, 最高次の係数は正} \end{cases} \cdots (☆)$$

$f(x) = \mathrm{Arc}\cos x$ とすると.

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ここで,

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\, T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$ とおくと

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{1} \frac{\cos n(\mathrm{Arc}\cos x)\cos m(\mathrm{Arc}\cos x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$\theta = \mathrm{Arc}\cos x$ と変数変換すると.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \therefore \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d\theta$$

そして, $x: -1 \to 1$ で $\theta: \pi \to 0$

よって

$$I_{n,m} = \int_{\pi}^{0} \cos n\theta \cos m\theta\,(-d\theta)$$

$$= \int_{0}^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2}\cos(n+m)\theta + \frac{1}{2}\cos(n-m)\theta \right\} d\theta$$

よって

(i) $m \neq n$ のとき

$$I_{n,m} = \left[\frac{1}{2(n+m)} \sin(n+m)\theta + \frac{1}{2(n-m)} \sin(n-m)\theta \right]_0^{\pi}$$

$$= 0$$

(ii) $m = n$ のとき

$$I_{n,m} = \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2n\theta}{2} d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2n\theta \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

以上より、

$$I_{n,m} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$ //