数学II (志甫) 演習プリント(4)　(2006年6月8日)

例題1　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

例題2　次の行列 A の階数を求めよ.

(1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.　(2)　$A = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & \cdots & 1+n \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & \cdots & 2+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & n+n \end{pmatrix}$　(第 (i,j) 成分が $i+j$ であるような n 次正方行列).

問題1　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

問題2　次の行列 A の階数を求めよ.

(1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.　(2)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & 0 & n-1 \\ n & n & n & \cdots & n & 0 \end{pmatrix}$

($i \neq j$ の時第 (i,j) 成分が i で, 第 (i,i) 成分が 0 であるような n 次正方行列).

問題3*　A を (m,n) 型行列とし, $\mathrm{rk}A \leq r$ が成り立つとする ($r \leq n, m$). このとき, A はある (m,r) 型行列 B とある (r,n) 型行列 C の積 $A = BC$ として表わされること を示せ.

(ヒント : $\mathrm{rk}A = r'$ とするとある正則行列 P, Q を用いて $A = PE_{m,n}(r')Q$ と書ける. $E_{m,n}(r')$ を (m,r) 型行列と (r,n) 型行列との積で書いてみよ.)

問題4*　A を n 次正方行列 ($n \in \mathbb{N}$) とすると, A はある n 次正則行列 B とある $C^2 = C$ を満たす n 次正方行列 C との積 $A = BC$ として表されることを示せ.

(ヒント : まず $A = PE_{n,n}(r)Q$ (P, Q は正則行列, $r = \mathrm{rk}A$) と書き, これをうまく書きかえて B, C を見つけよ.)

6/8. 数Ⅱ 演習問題解答

例題1

$$(A\ I_n)=\begin{pmatrix}1&3&2&1&0&0\\-1&-2&-1&0&1&0\\2&4&3&0&0&1\end{pmatrix}\ \times 1\ \ \times(-2)$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&2&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&-2&-1&-2&0&1\end{pmatrix}\ \times 2$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&2&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&1&0&2&1\end{pmatrix}\ \times(-3)$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-3&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&1&0&2&1\end{pmatrix}\ \times(-1)\ \ \times 1$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-2&-1&1\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&0&2&1\end{pmatrix}$$

よって $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\1&-1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$ //

例題2

(1) $\begin{pmatrix}1&3&2\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}\ \times(-1)\ \ \times(-1)\ \longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

よって $\mathrm{rk}\,A=3$ //

(2)

$$\begin{pmatrix}1+1&1+2&\cdots&1+n\\2+1&2+2&\cdots&2+n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n+1&n+2&\cdots&n+n\end{pmatrix}\ \times(-1)\ \ \times(-1)\ \ \times(-1)$$

(第1行の(−1)倍を各行に加える)

$$
\rightarrow
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1+1 & 1+2 & \cdots & 1+n \\
2 & 2 & \cdots & 2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n & n & \cdots & n
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
\times \frac{1}{2} \\
\vdots \\
\times \frac{1}{n}
\end{array}
$$

（第 i 行 $(i \geqq 2)$ を $\frac{1}{i}$ 倍）

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
2 & 3 & \cdots & n+1 \\
1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
① \times (-1) \\
② \times (-1) \\
\times (-1) \\
\\
\end{array}
$$

（第2行の (-1) 倍を各行に加える）

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 2 & \cdots & n \\
1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & & O &
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\
② \times (-1) \\
\\
\end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 2 & \cdots & n \\
0 & -1 & \cdots & 1-n \\
 & & O &
\end{pmatrix}
$$

よって $\mathrm{rk}\,A = 2$ //

問題1

$$(A\ I_n)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\2&0&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\times(-2)\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&-2&0&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&1&-1/2&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\times(-1)\ \times(-1)\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&1/2&-1\\0&1&0&1&-1/2&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/2&-1\\1&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

問題2

(1)

$$\begin{pmatrix}1&2&0&2&1\\2&4&1&-2&3\\3&6&2&-6&5\end{pmatrix}\times(-2)\ \times(-3)\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&2&1\\0&0&1&-6&1\\0&0&2&-10&2\end{pmatrix}\times(-2)$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&2&1\\0&0&1&-6&1\\0&0&0&2&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \mathrm{rk}\,A=2$$

(2)

$$\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\2&0&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\n-1&n-1&n-1&\cdots&n-1\\n&n&n&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\times\frac{1}{2}\\\\\times\frac{1}{n-1}\\\times\frac{1}{n}\end{array}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix}\ \times(-1)\ \times(-1)\ \times(-1)$$

（第r行を $\frac{1}{r}$ 倍）

（第n行の(−1)倍を各行に加える）

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \times(-1) \\ \times(-1) \end{matrix}$$

（第1行，第2行，…，第(n−1)行の(−1)倍を第n行に加える。）

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-n \end{pmatrix}$$

$\therefore \ \mathrm{rk}\, A = n$ //

問題3

$\mathrm{rk}\, A = r'$ とおくと，ある正則行列 P, Q が存在して，

$$A = P E_{m,n}(r') Q$$ となる。

ここで，

$$E_{m,r}(r') E_{r,n}(r') = \begin{pmatrix} I_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} I_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix} = E_{m,n}(r')$$

であるから，

$$A = P E_{m,n}(r') Q$$
$$= \left(P E_{m,r}(r')\right)\left(E_{r,n}(r') Q\right)$$

よって
$$B = P E_{m,r}(r')$$
$$C = E_{r,n}(r') Q$$

とすると，

B は (m, r) 型行列
で，
C は (r, n) 型行列

$A = BC$ 　　である。 //

問題4

$r = \mathrm{rk}A$ とおくと、ある正則行列 P, Q が存在して

$$A = P E_{n,n}(r) Q$$ とかける。

ここで，

$$A = PQQ^{-1}E_{n,n}(r)Q$$ である。

($\because$ Q は正則)

$$B = PQ, \quad C = Q^{-1}E_{n,n}(r)Q$$

とすると、

B は正則行列の積なので正則であり、

$$C^2 = Q^{-1}E_{n,n}(r)QQ^{-1}E_{n,n}(r)Q$$
$$= Q^{-1}E_{n,n}(r)^2Q = Q^{-1}E_{n,n}(r)Q = C$$
($\because$ $E_{n,n}^2(r) = E_{n,n}(r)$)

よって　A は正則行列 B と $C^2 = C$ をみたす行列によって $A = BC$ とかける。 //