# 数I演習問題 (１４，１５，１６組)
# 6月1日実施
# テーマ:有理関数の不定積分

担当:高木寛通 (たかぎひろみち)

(1)

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$$

を求めよ.

(2) $t = \tan\frac{x}{2}$ とおくことで

$$\int \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2} dx \ (a^2 < 1)$$

を求めよ.

(3) $f(x, y)$ を有理関数, つまり, ($x$, $y$ の多項式)/($x$, $y$ の多項式) という形をした関数とするとき,

$$\int f(\sin t, \cos t) dt$$

は $t = \tan\frac{x}{2}$ とおくことで, $t$ の有理関数の不定積分の計算に帰着することを示せ.

(4)

$$I_n := \int (\mathrm{Arcsin}\, x)^n dx$$

の漸化式を作れ. (ヒント：有理関数の積分とは関係ないが授業でやった漸化式の作り方が有効.)

(5) この問題は数学的にはおおらかに考える. 授業でやった $e^x$ のテーラー多項式

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

が無限に続くものとする. この無限の項を持つ多項式の $x$ に $ix$ ($i$ は虚数単位, $x$ は実数) を代入すると, その実部が $\cos x$ のテーラー多項式, 虚部が $\sin x$ のテーラー多項式 (いずれも無限に項を持つと考え

る) になることを示せ.
注：これはいずれ授業で正当化する. ここではちょっとおおらかな議論を続けてみる. また, $e^{ix}$ を $1+ix+\frac{1}{2!}(ix)^2+\frac{1}{3!}(ix)^3+\cdots+$ で定義し, $\cos x$, $\sin x$ を無限に項を持つテーラー多項式と同一視することにすると, ここで示したことは

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

という公式になる. これを博士の愛した数式, じゃなくてオイラーの公式と言う. (博士の愛した数式は $x=\pi$ とした $e^{i\pi}=-1$.) $ix$ の代わりに $-ix$ を代入してみると $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ を得るから, これより

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\ \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \tag{0.1}$$

が成り立つ. こうしてみると $\cos x$, $\sin x$ は $\cosh x$, $\sinh x$ と非常によく似ていることが分かる. 指数関数の指数法則は $e^{ix}$, $e^{-ix}$ などについても成立すると仮定すると, (0.1) から出発して, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ や三角関数の加法定理を導くことが出来る. また, $(\cos x)'=-\sin x$, $(\sin x)'=\cos x$ なども導くことが出来る.

# 数学演習　6/1

(1)
$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

とおく。両辺に $x^2(x^2+1)^2$ をかけると、

$$1 = Ax(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + (Cx+D)x^2(x^2+1) + (Ex+F)x^2$$

$$= (A+C)x^5 + (B+D)x^4 + (2A+C+E)x^3 + (2B+D+F)x^2 + Ax + B$$

両辺の係数を比べて

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 2A+C+E=0 \\ 2B+D+F=0 \\ A=0 \\ B=1 \end{cases}$$

$\therefore$ $A=0$　$B=1$　$C=0$　$D=-1$
$E=0$　$F=-1$

よって

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

ここで，

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{Arctan}\,x + C$$

また，

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{(x)'}{(x^2+1)}dx = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,x + C$$

よって

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{3}{2}\mathrm{Arctan}\,x + C$$

(2) $t = \tan\frac{x}{2}$ より

$$dt = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2}dx = \frac{1+t^2}{2}dx$$

$$\therefore \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

また, $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1$

$$= \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

よって.

$$\int \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}dx = \int \frac{1-a^2}{1-2a\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+a^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt.$$

$$= \int \frac{2(1-a^2)\,dt.}{(1+a^2)(1+t^2)-2a(1-t^2)}$$

$$= \int \frac{2(1+a)(1-a)\,dt}{(1+a)^2t^2+(1-a)^2}$$

$$= \frac{2(1-a)}{(1+a)}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2}$$

$$= \frac{2(1-a)}{1+a}\cdot\frac{1+a}{1-a}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1+a}{1-a}\right)t + C.$$

$$= 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1+a}{1-a}\right)t + C.$$

$$\int \frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}\,dx = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\tan\frac{x}{2} + C$$

(3)

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと

(2) より

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

よって

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx$$

$$= \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

ここで $f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2t}{1+t^2}$ は $t$ についての

有理関数なので、題意は示された。

(4)

$\mathrm{Arcsin}\,x = t$ とおくと

$x = \sin t$ より

$dx = \cos t\,dt$

$$\therefore\ I_n = \int t^n \cos t\,dt$$

$$= \int t^n (\sin t)'\,dt$$

$$= t^n \sin t - n\int t^{n-1} \sin t\,dt$$

$$= t^n \sin t + n\int t^{n-1} (\cos t)'\,dt$$

$$= t^n \sin t + n t^{n-1} \cos t - n(n-1)\int t^{n-2} \cos t\,dt$$

$$= t^n \sin t + n t^{n-1} \cos t - n(n-1) I_{n-2}$$

$-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{t}{2}$ より、 $\cos t \geqq 0$

よって $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ なので、

$$I_n = t^n \sin t + n t^{n-1} \sqrt{1-\sin^2 t} - n(n-1) I_{n-2}$$

$$= (\mathrm{Arcsin}\,x)^n \sin(\mathrm{Arcsin}\,x) + n(\mathrm{Arcsin}\,x)^{n-1} \sqrt{1-\sin^2(\mathrm{Arcsin}\,x)} - n(n-1) I_{n-2}$$

$$= x(\mathrm{Arcsin}\,x)^n + n\sqrt{1-x^2}(\mathrm{Arcsin}\,x)^{n-1} - n(n-1) I_{n-2}$$

$\therefore$

$$I_n = x(\mathrm{Arcsin}\,x)^n + n\sqrt{1-x^2}\,(\mathrm{Arcsin}\,x)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$$

(5)

$f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = e^x$

とすると，合同式の法を4として，

$$f^{n}(0) = \begin{cases} 0 & (n \equiv 1, 3) \\ 1 & (n \equiv 0) \\ -1 & (n \equiv 2) \end{cases} \qquad g^{n}(0) = \begin{cases} 0 & (n \equiv 0, 2) \\ 1 & (n \equiv 1) \\ -1 & (n \equiv 3) \end{cases}$$

$$h^{n}(0) = 1$$

よって

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k}(0)}{k!} x^k = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{n}(0)}{k!} x^k = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

よって

$$h(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= f(x) + i g(x)$$

$$\therefore \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

# 練習問題　6/1

## Ⅰ

$$\int \frac{-12x^2-38}{(x^2-1)(x^2+4)^2}\,dx$$ を求めよ

## Ⅱ

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$ を求めよ

## Ⅲ

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$ とする

(1) $I_n$ を $I_{n-2}$ であらわせ　$(n \geqq 2)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$ を示せ。

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{2\cdot \cdots\cdots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \cdots\cdots \cdot (2n-1)}\right\}^2 = \pi$$ を示せ。

よって

$$-12x^2-38 = -2(x^2+4)^2 + (Cx+D)(x^2-1)(x^2+4)$$
$$-2(x^2-1)$$

$x = \pm 2$ を代入し

$$\begin{cases} -86 = -134 + 24(2Cx+D) \\ -86 = -134 + 24(-2Cx+D) \end{cases}$$

$$\therefore \quad C = 0$$
$$D = 2$$

よって

$$\frac{-12x^2-38}{(x^2-1)(x^2+4)^2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+4} - \frac{2}{(x^2+4)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \log|x+1| + C \qquad \int \frac{dx}{x-1} = \log|x-1| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\frac{x}{2} + C$$

また,

$$\int \frac{(x)'}{x^2+4}dx = \frac{x}{x^2+4} - \int x \cdot \left\{-\frac{2x}{(x^2+4)^2}\right\}dx$$
$$= \frac{x}{x^2+4} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$$

I

$$\frac{-12x^2-38}{(x^2-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^2}$$

とおくと.

$$-12x^2-38 = \{(A+B)x + A - B\}(x^2+4)^2$$
$$+ ((Cx+D)(x^2-1)(x^2+4)$$
$$+ (Ex+F)(x^2-1)$$

$x = \pm 2i$ を代入して.

$$\begin{cases} 10 = (2iE+F)\cdot(-5) \\ 10 = (-2iE+F)\cdot(-5) \end{cases} \quad \therefore \quad E = 0, \quad F = -2$$

$x = \pm 1$ を代入して.

$$\begin{cases} -50 = 2A\cdot 25 \\ -50 = -2B\cdot 25 \end{cases} \quad \therefore \quad A = -1, \quad B = 1$$

$$= \frac{x}{x^2+4} + 2\int \frac{dx}{x^2+4} - 8\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16}\mathrm{Arctan}\frac{x}{2} + C$$

よって.

$$\int \frac{-12x^2-38}{(x^2-1)(x^2+4)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x^2+4} - 2\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

$$= \log|x+1| - \log|x-1| + 2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\frac{x}{2} - 2\cdot\frac{x}{8(x^2+4)} + 2\cdot\frac{1}{16}\mathrm{Arctan}\frac{x}{2} + C$$

$$= \log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{9}{8}\mathrm{Arctan}\frac{x}{2} - \frac{x}{4(x^2+4)} + C$$

//

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ では

$$\sin^{n-1} x \leqq \sin^n x \leqq \sin^{n+1} x$$

だから、各辺を $0$ から $\frac{\pi}{2}$ まで積分して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx$$

$$\therefore \quad I_{n-1} \leqq I_n \leqq I_{n+1}$$

$$\therefore \quad 1 \leqq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leqq \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$$

(1) より

$$\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = \frac{n}{n+1} \qquad \therefore \lim_{n \to \infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = 1$$

ハサミウチの原理より.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$$

$I_0 = \frac{\pi}{2}$

$I_1 = 1$　　だから

(1) をくり返し使って

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \cdots ①$$

$$I_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \quad \cdots ②$$

$\frac{①}{②}$ より.

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = 2n \cdot \left\{ \frac{(2n-2) \cdot \cdots \cdots \cdot 2}{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1} \right\}^2 \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left\{ \frac{2n \cdot (2n-2) \cdot \cdots \cdot 2}{(2n-1) \cdot \cdots \cdots \cdot 3 \cdot 1} \right\}^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n-1}} = 1 \quad (1) \text{ より}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi n} \left\{ \frac{2n \cdot (2n-2) \cdot \cdots \cdot 2}{(2n-1) \cdot \cdots \cdots \cdot 3 \cdot 1} \right\}^2 = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{2n \cdot (2n-2) \cdot \cdots \cdot 2}{(2n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1} \right\}^2 = \pi$$