数学 II (志甫) 演習プリント (3)　(2006 年 5 月 25 日)

例題 1　A を n 次正方行列で，ある行の成分が全て 0 であるものとする．このとき A は正則行列ではないことを示せ．

例題 2　A を n 次正方行列で，分割 $n=(n-1)+1$ に応じた対称区分けが $A=\begin{pmatrix} X & Y \\ O & z \end{pmatrix}$ の形になっていると仮定する．このとき，次の 2 条件は同値であることを示せ．
(a)　A は正則である．
(b)　X は正則で，かつ $z \neq 0$ である．

問題 1　$n \geq 2$ とする．A を n 次正方行列で，その第 1 行と第 2 行が一致していると仮定する．このとき A は正則行列ではないことを示せ．

問題 2　次の行列が正則であるかどうかを判定せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. (3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

問題 3*　0 以上の整数 k に対し，$M(n;K)$ の部分集合 Γ_k を次のように定義する：

$$\Gamma_k := \{A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M(n;K) \mid j-i<k \text{ の時 } a_{ij}=0\}.$$

(つまり，Γ_0 は n 次の上三角行列全体のなす集合である．また Γ_1 に属する行列のことを n 次の狭義上三角行列と呼ぶこともある．また $k \geq n$ ならば $\Gamma_k = \{O\}$ である．) 次の問いに答えよ．
(1)　$A \in \Gamma_k$, $B \in \Gamma_l$ ならば $AB \in \Gamma_{k+l}$ が成り立つことを示せ．
(2)　$A \in \Gamma_0$, $B \in \Gamma_0$ ならば $AB-BA \in \Gamma_1$ が成り立つことを示せ．

問題 4*　A を実数を成分とする n 次正方行列とし，ある自然数 k に対して $A^k=O$ を満たすと仮定する．この時，xI_n-yA が正則行列となるための $x,y \in \mathbb{R}$ についての必要充分条件を求めよ．

5/25 演習問題 解答

例題1

$A = (a_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq n} \in M(n ; K)$

とし，Aの第k行が0，つまり $1 \leqq r \leqq n$ に対して

$a_{kr} = 0$ であるとする。

Aが逆行列 $A^{-1} = (a'_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq n}$ をもつとすると

$AA^{-1} = E$ の両辺の (k, k) 成分を比べて

$\sum_{r=1}^{n} a_{kr} a'_{rk} = 1$ しかし $a_{kr} = 0$ だから，

左辺は0であるはずであり，矛盾する。

よって Aは逆行列をもたず，正則でない。

例題2

(i) (a) $\Rightarrow$ (b)

A が正則であるとし，A^{-1} の $n = (n-1) + 1$ に

応じた対称区分けが $A^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & e \end{pmatrix}$ であると

すると，

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} XB + YD & XC + eY \\ zD & ez \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} BX & BY + zC \\ DX & ez \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Date . . No.

各区画の成分を比べて.

$$\begin{cases} XB + YD = I_{n-1} & \cdots ① \\ XC + eY = O & \cdots ② \\ zD = O & \cdots ③ \\ ez = 1 & \cdots ④ \end{cases}$$

$$\begin{cases} BX = I_{n-1} & \cdots ⑤ \\ BY + zC = O & \cdots ⑥ \\ DX = O & \cdots ⑦ \\ ez = 1 & \cdots ⑧ \end{cases}$$

④より $z \neq 0$ で、これと③より $D = O$

よって①、⑤より $BX = XB = I_n$ だから、X は

正則で逆行列は B

以上より (b): $z \neq 0$ かつ X は正則

が成立する。

(ii) (b) $\Rightarrow$ (a)

$$B = \begin{pmatrix} X^{-1} & -\frac{1}{z}X^{-1}Y \\ O & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$ とおくし

$AB = BA = O$ だから、B は A の逆行列.

よって (a): A は正則である。

が成り立つ。

以上 (i), (ii) より、(a) $\Leftrightarrow$ (b) //

(注)

(a) と (b) は同値なので，(a) の否定と (b) の否定も同値，つまり

「Aが正則でない」$\Leftrightarrow$「Xが正則でないか，$z=0$」

問題 2

(1)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3-(-1)\cdot 6 = 12 \neq 0 \text{ なので，}$$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ は正則

(2)

$X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$，$z=4$，$Y=\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ とすると

題意の行列Aは，$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ とかけ，

$|X| = 1\cdot 6-(-3)\cdot(-2) = 0$ なので，Xは正則でない。

よって例題2の(注)より

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ は正則でない。}$$

(3)

$X' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$Y'=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $z'=-4$ とおくと

$|X'| = 2\cdot 2-3\cdot 0 = 4 \neq 0$ だから，

Date . . No.

X' は正則で、かつ $Z' \neq 0$ 、よって

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' & Y' \\ 0 & Z' \end{pmatrix}$$ は正則

よって、

$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z = 3$ とおくと、

X は正則で、かつ $Z \neq 0$ だから

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$ は正則

問題 3

(1)

$AB = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

$B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

とおくと、 $c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$ ---- ①

ここで、$j - i < k + l$ のとき、

もし、「$j - r \geq k$」かつ「$r - i \geq l$」であれば

辺々たして $j - i \geq k + l$ となり仮定に反する。

よって「$j - r < k$」または「$r - i < l$」であり、

$A \in \Gamma_k$, $B \in \Gamma_l$ だから、

「$a_{ir} = 0$」 または「$b_{rj} = 0$」

すなわち $a_{ir} b_{rj} = 0$

よって ① より、 $c_{ij} = 0$

以上より $j - i < k + l \Rightarrow c_{ij} = 0$ なので

$AB \in \Gamma_{k+l}$ である。

(2)

$AB - BD = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

とおくと、 $$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj} - b_{ik} a_{kj})$$

である。 $j - i < 1$ のとき、

「$j - i < 0$」 か 「$j = i$」 のどちらかである。

(i) $j - i < 0 \Leftrightarrow j < i$ のとき、

(a) $k < j$ のときは

$a_{ik} = b_{ik} = 0 \quad \therefore \quad a_{ik} b_{kj} - b_{ik} a_{kj} = 0$

(b) $k \geq j$ のときは

$a_{kj} = b_{kj} = 0 \quad \therefore \quad a_{ik} b_{kj} - b_{ik} a_{kj} = 0$

よって $d_{ij} = 0$

(ii) $j-i=0 \Leftrightarrow j=i$ のとき,

(a) $k<j$ のときは

$a_{ik}=b_{ik}=0 \quad \therefore\ a_{ik}b_{kj}-b_{ik}a_{kj}=0$

(b) $k=j$ のときは,

$a_{ik}b_{kj}-b_{ik}b_{kj}=a_{kk}b_{kk}-a_{kk}b_{kk}=0$

(c) $k>j$ のときは

$a_{kj}=b_{kj}=0 \quad \therefore\ a_{ik}b_{kj}-b_{ik}a_{kj}=0$

よって $d_{ij}=0$

以上より $j-i<1 \Rightarrow d_{ij}=0$ なので,

$AB-BA \in \Gamma_1$

問題4

(a)「$xI_n - zA$ が正則」$\Leftrightarrow$ (b)「$x \neq 0$」

であることを示す。

(i) (a) $\Rightarrow$ (b)

「$xI_n - zA$ が正則」であるとする。このとき,もし「$x=0$」であるとすると,「$-zA$」は正則なのでその逆行列をXとすると,$-zAX = X\cdot(-zA) = I_n$

よって $A(-zX) = (-zX)A = I_n$ だから,Aは逆行列をもつ。すると $A^k = O$ に左から A^{-1} を k回かけて,$I_n = O$ となり,矛盾する。

よって「$x \neq 0$」である。

(ii) (b) $\Rightarrow$ (a)

$x \neq 0$ のとき、

$$X = \frac{1}{x}\left\{I_n + \frac{y}{x}A + \left(\frac{y}{x}A\right)^2 + \cdots + \left(\frac{y}{x}A\right)^{k-1}\right\}$$

とすると

$$\begin{aligned}(xI_n - yA)X &= \left(I_n - \frac{y}{x}A\right)\left\{I_n + \left(\frac{y}{x}A\right) + \cdots + \left(\frac{y}{x}A\right)^{k-1}\right\} \\ &= I_n - \left(\frac{y}{x}A\right)^k \\ &= I_n \qquad (\because A^k = O)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X(xI_n - yA) &= \left\{I_n + \left(\frac{y}{x}A\right) + \cdots + \left(\frac{y}{x}A\right)^{k-1}\right\}\left(I_n - \frac{y}{x}A\right) \\ &= I_n - \left(\frac{y}{x}A\right)^k \\ &= I_n \qquad (\because A^k = O)\end{aligned}$$

よって $(xI_n - yA)X = X(xI_n - yA) = I_n$

なので、$xI_n - yA$ は逆行列として X をもつ。

よって (a)「$xI_n - yA$ は正則」が成り立つ。

以上より、求める必要十分条件は

「$x \neq 0$」

Date . . No.

練習問題 5/25 分

問題 1

$A \in M(n;k)$ $B \in M(n;k)$ とする。

(1) A, AB が正則であるとき, B も正則であることを示せ

(2) A が正則なとき, その転置行列 ${}^tA$ も正則であることを示せ。

問題 2

$A = (a_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq n} \in M(n;k)$ とする。

行列 A のトレースを
$$\mathrm{tr}A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$ で定める。

(1) $B \in M(n;k)$ のとき,
$\mathrm{tr}\,AB = \mathrm{tr}\,BA$ を示せ。

(2) 正則行列 $P \in M(n;k)$ に対し
$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}A$ を示せ

問題 3

$A = (a_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq n} \in M(n;k)$ が,

「$j \geqq i \Rightarrow a_{ij} = 0$」 をみたすとする。

このとき, $A^n = O$ を示せ。

解答

問題1

(1) $(AB)^{-1}A^{-1}$ が B の逆行列であることを示す。

$$B\{(AB)^{-1}A^{-1}\} = A^{-1}(AB)\{(AB)^{-1}A^{-1}\}$$
$$= A^{-1}A = E$$

$$\{(AB)^{-1}A\}B = (AB)^{-1}AB = E$$

よって

$$B\{(AB)^{-1}A^{-1}\} = \{(AB)^{-1}A^{-1}\}B = E$$

より、B は逆行列 $(AB)^{-1}A^{-1}$ をもつ。よって B は正則である。

(2) ${}^t(A^{-1})$ が ${}^tA$ の逆行列であることを示す。

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ であったから

$${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E$$
$${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tE = E$$

よって ${}^tA$ には逆行列が存在し、
$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である。

よって ${}^tA$ は正則である。

問題2.

(1) $B = (b_{ij})_{1 \leqq i, j \leqq n}$ とする。

$$(AB \text{ の } (k,k) \text{成分}) = \sum_{r=1}^{n} a_{kr} b_{rk}$$

$$(BA \text{ の } (k,k) \text{成分}) = \sum_{r=1}^{n} b_{kr} a_{rk}$$

よって

$$tr(AB) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} a_{kr} b_{rk} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{kr} b_{rk}$$

$$tr(AB) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} b_{kr} a_{rk} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} b_{kr} a_{rk}$$

添え字の k と r を入れかえることにより、

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{kr} b_{rk} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{rk} b_{kr} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} b_{kr} a_{rk}$$

$\therefore$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

(2)

(1) を使って

$$\begin{aligned} tr(P^{-1}AP) &= tr((P^{-1}A)P) \\ &= tr(P(P^{-1}A)) \\ &= tr(PP^{-1}A) \\ &= tr\,A \end{aligned}$$

$$\therefore \quad tr(P^{-1}AP) = tr A$$

問題 3

次の命題が成立することを数学的帰納法で示す。

「$A^k = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leqq i, j \leqq n}$ とおくとき、

$j - i < k \Rightarrow a_{ij}^{(k)} = 0$ 」 ---(☆)

(i) $k = 1$ のとき、

$j - i < 1 \Leftrightarrow j \leqq i$ （∵ j, i は整数）

なので、仮定より

「$j - i < 1 \Rightarrow a_{ij}^{(1)} = a_{ij} = 0$ 」

が成り立つ。

(ii) $k = r$ のとき (☆) が成り立つとする。

$A^{r+1} = A^r A$ より

$$a_{ij}^{(r+1)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(r)} a_{sj}$$

さて、$j - i < r+1$ のとき、

「$s - i < r$」か「$j - s < 1$」が成立する

（もし $s - i \geqq r$ かつ $j - s \geqq 1$ なら、辺々たして
$j - i \geqq r+1$ で矛盾 ）

Date . . No.

「$s-i<r$」のとき，仮定より $a_{is}^{(r)}=0$

「$j-s<1$」のとき，(i) より $a_{sj}=0$

よって $a_{is}^{(r)}=0$ または $a_{sj}=0$

よって $a_{is}^{(r)}a_{sj}=0$

$\therefore\ a_{ij}^{(r+1)}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}^{(r)}a_{sj}=0$

$\therefore$「$j-i<r+1 \Rightarrow a_{ij}^{(r+1)}=0$」

よって (☆) は $k=r+1$ でも正しい。

以上 (i), (ii) より，(☆) はすべての k で正しい。

さて，$k=n$ としてみると，$1\leqq i, j\leqq n$

なので，任意の i, j で，

$j-i<n$ だから，$a_{ij}^{(n)}=0$

$\therefore\ A^n=O$ //