

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 自然数全体の集合

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 整数全体の集合

$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}\}$ 有理数全体の集合

\mathbf{R} = 実数全体の集合

$\mathbf{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ 複素数全体の集合

以下、 $K \in \mathbf{C}$ 又は \mathbf{R}

定義

$m, n \in \mathbf{N}$ に対して m, n 個の元を縦に m 個、横に n 個並べたものを K の元を成分とする m 行 n 列の行列という。

これを (m, n) 行列ともいい、その全体のなす集合を $M(m, n; K)$ と書く。

また、行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を

$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ と書く。

定義

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

(1) 和 $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

(2) A の c によるスカラー倍 $cA = (ca_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

(3) 積 AB を

$$(\text{積 } AB \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$$

$$= \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$$

により定める。

積 AB は、 A の列数と B の行数が等しければ定義できる。

このとき AB の行数は A のそれに等しく、列数は B のそれに等しい。

計算法則

$$(1) A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + O = O + A = A$$

$$(2) c(A + B) = cA + cB$$

$$(c + d)A = cA + dA$$

$$(3)(AB)C = A(BC)$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$AI = IA = A$$

$$c(AB) = (cA)B = A(cB)$$

I は単位行列

以上は行列の積の定義から証明できる