数学II (志甫) 演習プリント(2)　(2006年5月11日)

例題1　行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ に対し，AB および BA を求めよ．

定義　正方行列 A と $k\in\mathbb{N}$ に対し，行列 A を k 回掛けて得られる行列を A^k と書き，A の k 乗と呼ぶ．

例題2　次の行列 A の k 乗 $(k\in\mathbb{N})$ を求めよ．

(1)　$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.　(2)　$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

問題1　行列 $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ に対し，AB および BA を求めよ．

問題2　次の行列 A の k 乗 $(k\in\mathbb{N})$ を求めよ．

(1)　$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.　(2)　$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

問題3*　$A\in M(l,m;\mathbb{R}), B\in M(m,n;\mathbb{R})$ とする．以下の問に答えよ．

(1)　A,B の各成分が正の実数であるとき，AB の各成分も正の実数であることを示せ．

(2)　A,B の第 (i,j) 成分が $i+j$ が偶数の時に正，$i+j$ が奇数の時に負であったとする．この時 AB の第 (i,j) 成分についても同様の性質が成り立つことを示せ．

(3)　A の任意の行についてその行の成分の和が a であり，また B の任意の行についてその行の成分の和が b であったとする．この時 AB の任意の行についてその行の成分の和は ab であることを示せ．

数学Ⅱ　演習問題解答

例題1

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0-1 & 3+2+2 \\ 0+0+2 & 0+2-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 3+3 & -1+6 \\ -1+0 & 3-2 & -1-4 \\ -1+0 & 3-2 & -1-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

例題2

(1)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　なので，

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ …… (☆)　と推測できる。

(☆) を数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので (☆) は正しい。

(ii) $n=k$ のとき (☆) が正しいとする。

このとき，$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

なので、(☆) は $n=k+1$ でも正しい。

以上より (☆) はすべての n で正しく、

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ である。

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2E$$

よって、

(i) $n = 2k$ のとき、

$$A^n = A^{2k} = (A^2)^k = (-2E)^k = (-2)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $n = 2k-1$ のとき、

$$A^n = A^{2k-1} = A \cdot (A^2)^{k-1} = A \cdot (-2E)^{k-1} = (-2)^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

以上 (i)、(ii) より、

$$A^n = \begin{cases} (-2)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (n\text{が偶数}) \\ (-2)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (n\text{が奇数}) \end{cases}$$

問題1

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3-1 & -3-6+2 \\ 0+1+2 & 0-2-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 3+3 & -1+6 \\ -1+0 & 3-2 & -1-4 \\ -1+0 & 3-2 & -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

問題2

(1)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

よって $A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ …… (☆) と推測できる。

(☆) を数学的帰納法で示す。

(i) $n = 1$ のとき

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ なので (☆) は正しい。

(ii) $n = k$ のとき (☆) が正しいとする

このとき、
$$A^{k+1} = A^k A = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^k \begin{pmatrix} -1 & n+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} 1 & -(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから、(☆) は $n = k+1$ でも正しい。

以上より (☆) はすべての n で正しく、

$$A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

No. Date . .

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} = 30E$$

よって、

(i) $n = 3k-2$ のとき、

$$A^n = A \cdot (A^3)^{k-1} = A \cdot 30^{k-1} E = 30^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) $n = 3k-1$ のとき

$$A^n = A^2 (A^3)^{k-1} = A^2 \cdot 30^{k-1} E = 30^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) $n = 3k$ のとき、

$$A^n = (A^3)^k = 30^k E = 30^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以上 (i) ～ (iii) を合わせて、

$$A^n = \begin{cases} 30^{\frac{n-1}{3}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (n\text{を3でわったあまりが1のとき}) \\ 30^{\frac{n-2}{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} & (n\text{を3でわったあまりが2のとき}) \\ 30^{\frac{n}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (n\text{が3でわり切れるとき}) \end{cases}$$

問題3

(1)

$A=(a_{ij})_{\substack{1\leqq i\leqq l\\1\leqq j\leqq m}}$ $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqq i\leqq m\\1\leqq j\leqq n}}$ とし

a_{ij}, b_{ij} は正の実数だとすると

(ABの(i,j)成分)

$=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$ であるから (ただし $\substack{1\leqq i\leqq l\\1\leqq j\leqq n}$)

(ABの(i,j)成分) は正の実数

ゆえに ABの各成分は正の実数 //

(2)

$\begin{cases} i+j \text{ が偶数のとき } a_{ij}, b_{ij} > 0 \\ i+j \text{ が奇数のとき } a_{ij}, b_{ij} < 0 \end{cases}$ …… (☆)

である。

ここで,

(ABの第(i,j)成分) $=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$ について

(i) $i+j$ が偶数のとき,

($i+j$が偶数) $\Leftrightarrow$ (iとjの偶奇が同じ)
$\Leftrightarrow$ ($(i+k)$と$(j+k)$の偶奇が同じ)
$\Leftrightarrow$ ($a_{i,k}$と$b_{k,j}$が同符号)
($\because$ (☆))

No. Date

よって a_{ik} と b_{kj} の符号が同じなので、

$a_{ik}b_{kj} > 0$

$\therefore$ (ABの第(i,j)成分) $= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} > 0$

(ii) $i+j$ が奇数のとき

($i+j$ が奇数) $\Longleftrightarrow$ (i と j の偶奇が異なる)
$\Longleftrightarrow$ ($(i+k)$ と $(j+k)$ の偶奇が異なる)
$\Longleftrightarrow$ (a_{ik} と b_{kj} の符号が異なる)
($\because$ (☆))

よって a_{ik} と b_{kj} は異符号より

$a_{ik}b_{kj} < 0$

$\therefore$ (ABの第(i,j)成分) $= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} < 0$

以上 (i), (ii) より、題意は成立する。 //

(3)
$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} = a \ (1 \leqq i \leqq l)$, $\sum_{k=1}^{n} b_{ik} = b \ (1 \leqq i \leqq m)$

である。

(ABの(i,j)成分) $= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$

だから、$1 \leqq i \leqq l$ に対し

(ABの第i行の和) $= \sum_{p=1}^{n}$ (ABの(i,p)成分)

$= \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kp}\right)$

Date . . No.

$$= \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kp} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} a_{ik} b_{kp}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \left(\sum_{p=1}^{n} b_{kp} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b \quad (\because ②)$$

$$= b \sum_{k=1}^{m} a_{ik}$$

$$= ab \quad (\because ①)$$

よって $1 \leqq i \leqq l$ に対し
(ABの第 i 行の和) $= ab$
なので，題意は成立する。 //