数学II (志甫) 演習プリント(1)　(2006年4月20日)

例題1　$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R}$ とする．次の式が成り立つことを成分計算により確かめよ．
(0)　$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.
(1)　$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$.
(2)　$(c\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

例題2　次の線形変換 $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ に対応する行列を求めよ．
(1)　直線 $y = x$ に関する折り返し．
(2)　まず直線 $y = x$ に関して折り返し，次に原点を中心とする角度 $\pi/4$ の回転をする線形写像．
(3)　まず原点を中心とする角度 $\pi/4$ の回転をし，次に直線 $y = x$ に関して折り返す線形写像．

問題1　$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R}$ とする．次の式が成り立つことを成分計算により確かめよ．
(1)　$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.
(2)　$\mathbf{x} \cdot (c\mathbf{y}) = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

問題2　次の線形変換 $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ に対応する行列を求めよ．
(1)　直線 $y = -x$ に関する折り返し．
(2)　まず直線 $y = -x$ に関して折り返し，次に原点を中心とする角度 $\pi/3$ の回転をする線形写像．
(3)　まず原点を中心とする角度 $\pi/3$ の回転をし，次に直線 $y = -x$ に関して折り返す線形写像．

問題3*　$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ を満たすような線形変換とする．以下の問いに答えよ．
(1)　任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ が成り立つことを示せ．
(2)　$A \in M(2; \mathbb{R})$ を f に対応する2次正方行列とするとき，A は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ (θ はある実数) のいずれかの形をしていることを示せ．
(3)　f は原点を中心とするある角度の回転であるか，または x 軸に関する折り返しと原点を中心とするある角度の回転との合成であることを示せ．

(ヒント:(1) は $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2)$ を利用する．(2) は $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ の長さ，内積がどうなるべきかを考えてみよ．(3) は (2) を用いて考えよ.)

数学II 演習問題解答 ⑬

例題1

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

とおくと.

(0)

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = x_1\cdot x_1 + x_2\cdot x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$\therefore \|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$$

(1)

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$
$$= (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)\cdot z_2$$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} = (x_1z_1 + x_2z_2) + (y_1z_1 + y_2z_2)$$
$$= (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2$$

$$\therefore (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$$

(2)

$$(c\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = cx_1y_1 + cx_2y_2$$

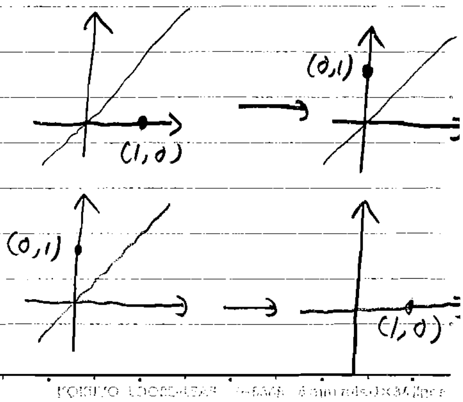
$$c(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = c(x_1y_1 + x_2y_2)$$

例題2

(1)

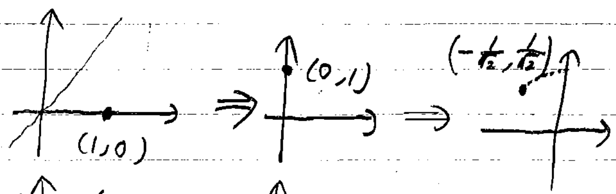
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

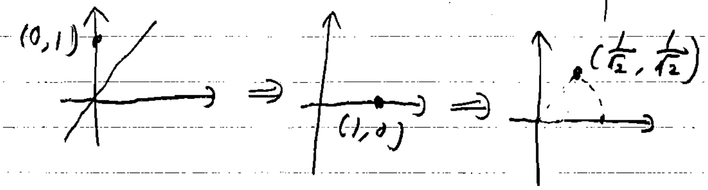


(2)

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$



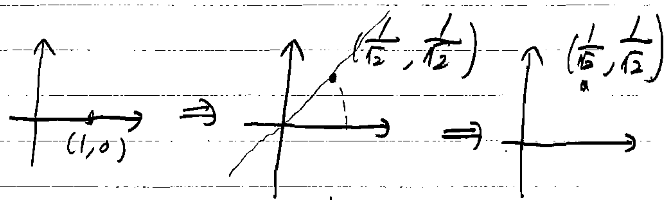
$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$



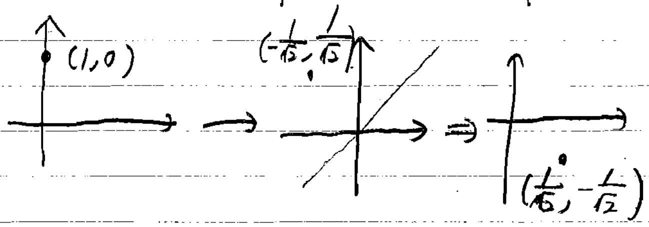
$$\therefore\ A_f=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

(3)

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$



$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$



$$\therefore\ A_f=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

別解 (2), (3)

(1)の変換を f', $\pi/4$ 回転の変換を θ とすると

(2) $$A_f = A_{\theta\circ f'} = A_\theta A_{f'} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

(3) $$A_f = A_{f'\circ\theta}$$

$$= A_{f'}A_\theta = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

問題 1

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とする.

(1)

$$\mathbb{x} \cdot (\mathbb{y} + \mathbb{z}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2)$$

$$\mathbb{x} \cdot \mathbb{y} + \mathbb{x} \cdot \mathbb{z} = (x_1 y_1 + x_2 y_2) + (x_1 z_1 + x_2 z_2)$$

$$= x_1 (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2)$$

$$\therefore \quad \mathbb{x} \cdot (\mathbb{y} + \mathbb{z}) = \mathbb{x} \cdot \mathbb{y} + \mathbb{x} \cdot \mathbb{z}$$

(2)

$$\mathbb{x} \cdot (c\mathbb{y}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cy_1 \\ cy_2 \end{pmatrix} = c x_1 y_1 + c x_2 y_2$$

$$c(\mathbb{x} \cdot \mathbb{y}) = c(x_1 y_1 + x_2 y_2) = c x_1 y_1 + c x_2 y_2$$

$$\therefore \quad \mathbb{x} \cdot (c\mathbb{y}) = c(\mathbb{x} \cdot \mathbb{y})$$

問題 2

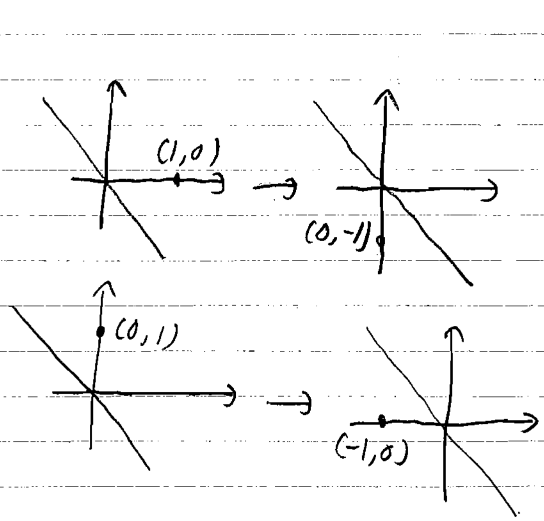
(1)

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

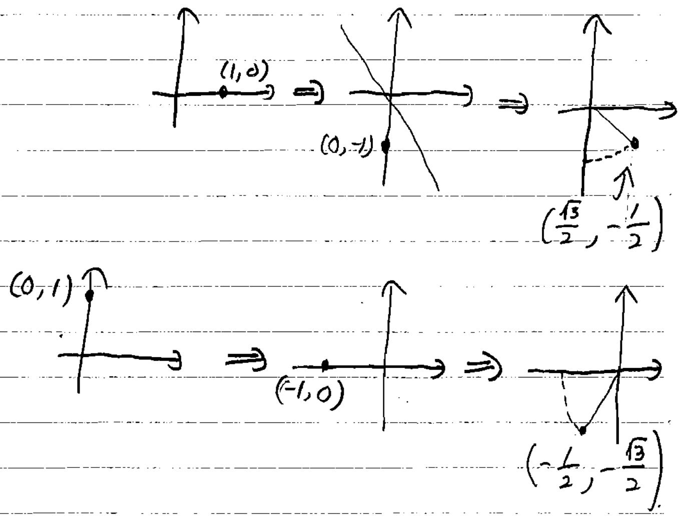


(2)

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$A_f = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$



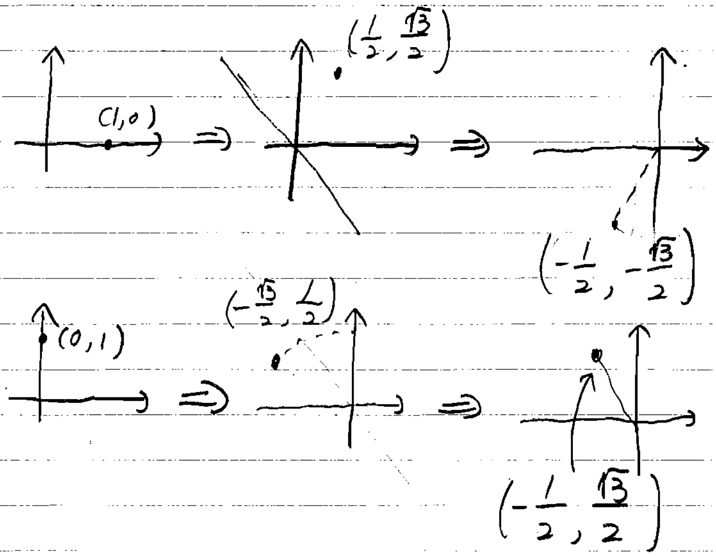
(3)

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

よって

$$A_f = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$



別解 (2), (3)

(1)の変換をf', $\pi/3$回転の変換をθとおいて

(2) $$A_f = A_{\theta\circ f'} = A_\theta A_{f'} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

(3) $A_f = A_{f' \circ \theta} = A_{f'} A_\theta$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

問題 3

(1)

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2)$$

なので、

$f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y})$

$$= \frac{1}{2}\left(\|f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2\right) \quad (\because f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}))$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2\right) \quad (\because \|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|)$$

$$= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

$$\therefore f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \quad //$$

(2)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくとき、

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

よって

$\left\|\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = 1 \quad \left\|\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = 1$ なので、

No. Date

$$\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \end{cases}$$

よって、(a,c) と (b,d) は、単位円 $x^2+y^2=1$ 上にあるので、$\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ を用いて、

$$(a, c)=(\cos\theta, \sin\theta),\ (b,d)=(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

とかける。
ところで、(1) より

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$$

なので、

$$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore \cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi=0$$

$$\therefore \cos(\varphi-\theta)=0$$

$$\therefore \varphi-\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi \text{ or } \frac{3}{2}\pi+2n\pi$$

$$(n\in\mathbb{N})$$

(i) $\varphi=\theta+\frac{\pi}{2}+2n\pi$ のとき、

$$(\cos\varphi, \sin\varphi)=\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}+2n\pi\right), \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)$$
$$=(-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \cos\varphi\\ \sin\theta & \sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

(ii) $\varphi=\theta+\frac{3}{2}\pi+2n\pi$ のとき、

$$(\cos\varphi, \sin\varphi)=\left(\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right), \sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi+2n\pi\right)\right)$$
$$=(\sin\theta, -\cos\theta)$$

よって

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\varphi \\ \sin\theta & \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

以上 (i), (ii) により

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

//

(3)

x 軸 に よる おり 返し を g であらわすと

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき、f は 原点中心の θ 回転。

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} A_g'$$

だから、 f は x 軸 に 関する おり 返しと, 原点中心の θ 回転 の合成

以上 より、題意 は示された。

//