◎

数IB演習問題（１４，１５，１６組）

4月13日実施

テーマ：二変数関数の偏微分, 微分可能性

担当:高木寛通 (たかぎひろみち)

注意:A4 の紙一枚両面に収まるように書いてください.

(1) (授業中に出した問題など) 次の関数を偏微分せよ.

$(a)\ x^3+y^3-3xy$ $(b)\ \sqrt{x^2+y^2}$ $(c)\ e^{ax}\cos by$ $(d)\ \log(x^2+y^2)$ $(e)\ x^y$

$(f)\ \sin(x^2+y^2)$ $(g)\ xy\log(2x+y)$

(2)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y(3x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

は原点で連続であることを示せ. さらに, 原点で x, y について偏微分可能なことを偏微分の定義に戻って示せ.

(3)

$$u=\frac{x\cos\alpha-y\sin\alpha}{x^2+y^2},\ v=\frac{x\sin\alpha+y\cos\alpha}{x^2+y^2}$$

とするとき

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

を計算せよ.

(4) 授業に対する要望があったら書いてください.

Date . . No.

数学I演習 4/13日分 ①

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a e^{ax} \cos by \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -b e^{ax} \sin by$$

(d)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

(e)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x$$

(f)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(x^2+y^2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin(x^2+y^2)$$

(g)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \log(2x+y) + \frac{2xy}{2x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \log(2x+y) + \frac{xy}{2x+y}$$

(2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(3x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

において, 極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

をほどこすと.

No. Date

$(x,y) \neq (0,0)$ において

$$f(x,y) = r\sin\theta \cdot \frac{r^2(3\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$= r\sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

ここで, $\sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ は有限の値なので,

$(x,y) \to (0,0)$ すなわち $r \to 0$ のとき

$f(x,y) \to 0$ ……… (※)

よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

なので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続

(注)

(※) の部分を少し詳しくかくと

$$0 \leqq |f(x,y)| = |r\sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta)|$$

$$= r|\sin\theta|\,|3\cos^2\theta - \sin^2\theta|$$

で, 三角不等式 $|x+y| \leqq |x| + |y|$ により

$|\sin\theta| \leqq 1$

$|3\cos^2\theta - \sin^2\theta| \leqq |3\cos^2\theta| + |-\sin^2\theta| \leqq 3+1 = 4$

よって $0 \leqq |f(x,y)| \leqq r \cdot 1 \cdot 4 = 4r$

だから, $(x,y) \to (0,0)$, つまり $r \to 0$ のとき

ハサミウチの原理より $f(x,y) \to 0$

(3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\cos\alpha\ (x^2+y^2) - 2x(x\cos\alpha - y\sin\alpha)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2-y^2)\cos\alpha + 2xy\sin\alpha}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\cos\alpha\ (x^2+y^2) - 2y(x\sin\alpha + y\cos\alpha)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(y^2-x^2)\cos\alpha - 2xy\sin\alpha}{(x^2+y^2)^2}$$

よって

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Date . . No.

数学 I ㉘

練習問題 4/13 日分

1 次の関数を偏微分せよ.

(1) $f(x,y) = x^5 + x^4 y + x^3 y^2 + x^2 y^3 + x y^4 + y^5$

(2) $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{2x+y}$

(3) $f(x,y) = xy\sqrt[3]{x^2+y^2}$

(4) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

(5) $f(x,y) = \log(\cos ax + \sin by)$

(6) $f(x,y) = (\cos ax)^{\sin by}$

2 次の関数が原点で連続であることを示せ。

(1)
$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \dfrac{3x^2+2y^2}{2x^2+3y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

(2)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sin\sqrt{x^2+y^2}} & \left(0 < x^2+y^2 < \dfrac{\pi^2}{4}\right) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

No. Date

(3)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^4}-1}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

B

(1)

$$u = \frac{ae^x + be^y}{e^x + e^y}, \quad v = \frac{be^x + ae^y}{e^x + e^y}$$

のとき, $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y}$ を計算せよ.

(2)

$f(x,y) = xy\log(x+y) \quad (x, y > 0)$ のとき,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq \dfrac{3}{2}$ を示せ。

解答

I

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 + 4x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 + 4xy^3 + 3x^2y^2 + 2x^3y + x^4$$

(2)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1\cdot(2x+y)-2\cdot(x+2y)}{(2x+y)^2} = \frac{-3y}{(2x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\cdot(2x+y)-1\cdot(x+2y)}{(2x+y)^2} = \frac{3x}{(2x+y)^2}$$

(3)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^2y(x^2+y^2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{x^2+y^2}\left(y + \frac{2x^2y}{3(x^2+y^2)}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}xy^2(x^2+y^2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{x^2+y^2}\left(x + \frac{2xy^2}{3(x^2+y^2)}\right)$$

(4)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,e^{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,e^{x^2+y^2}$$

(5)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-a\sin ax}{\cos ax + \sin by}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{b\cos by}{\cos ax + \sin by}$$

No. Date . .

(6)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -a \sin ax \sin by \, (\cos ax)^{\sin by - 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = b \cos by \log(\cos ax) \, (\cos ax)^{\sin by}$$

2

(1)

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とすると、$r \neq 0$ のとき、

$$f(x, y) = r\cos\theta \cdot \frac{r^2(3\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)}{r^2(2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)}$$

$$= r\cos\theta \cdot \frac{2+\cos^2\theta}{2+\sin^2\theta}$$

ここで

$$\left|\cos\theta \cdot \frac{2+\cos^2\theta}{2+\sin^2\theta}\right| \leqq |\cos\theta| \cdot \left(\frac{1}{2+\sin^2\theta}\right) \cdot (2+\cos^2\theta)$$

$$\leqq 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$ なので、

$$0 \leqq |f(x, y)| \leqq \frac{3}{2} r$$

よって $(x, y) \to (0, 0)$ のとき、$r \to 0$ だから、
ハサミウチの原理より、$f(x, y) \to 0$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続

(2)

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおくと. $r \neq 0$ のとき,

$$f(x, y) = \frac{r^2\cos^2\theta}{\sin r}$$

よって

$$0 \leqq |f(x, y)| = r \cdot \left|\frac{r}{\sin r}\right| \cdot |\cos^2\theta|$$

$$\leqq r \cdot \left|\frac{r}{\sin r}\right| \quad \cdots\cdots ①$$

$(x, y) \to (0, 0)$ のとき, $r \to 0$ で,

$\lim_{r\to 0} \frac{r}{\sin r} = 1$ なので,

(①の右辺) $\to 0 \cdot 1 = 0$

よって ハサミウチの原理より $f(x, y) \to 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ なので,

$f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続

(3)

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおくと. $r \neq 0$ のとき.

$$f(x, y) = \frac{e^{r^4\cos^4\theta} - 1}{r^2}$$

$$= r^2\cos^4\theta \cdot \left(\frac{e^{r^4\cos^4\theta} - 1}{r^4\cos^4\theta}\right)$$

よって

$$0 \leqq |f(x, y)| = r^2 \cdot |\cos^4\theta| \cdot \left|\frac{e^{r^4\cos^4\theta} - 1}{r^4\cos^4\theta}\right|$$

$$\leqq r^2 \cdot \left|\frac{e^{r^4\cos^4\theta} - 1}{r^4\cos^4\theta}\right| \quad \cdots\cdots ①$$

No. Date . .

$(x, y) \to (0, 0)$ のとき、 $r \to 0$ で、

$$\lim_{r \to 0} \left| \frac{e^{r^4 \cos^4 \theta} - 1}{r^4 \cos^4 \theta} \right| = \lim_{h \to 0} \left| \frac{e^h - 1}{h} \right| = 1$$

よって （①の右辺） $\to 0 \cdot 1 = 0$

だから、ハサミウチの原理より
$f(x, y) \to 0$

よって

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$ なので、

$f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続である。

B

(1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ae^x(e^x + e^y) - e^x(ae^x + be^y)}{(e^x + e^y)^2}$$
$$= \frac{(a - b)e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{ae^y(e^x + e^y) - e^y(be^x + ae^y)}{(e^x + e^y)^2}$$
$$= \frac{(a - b)e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(2)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \log(x + y) + \frac{xy}{x + y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \log(x + y) + \frac{xy}{x + y}$$

Date . . No.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y}{x+y} + \frac{y(x+y) - 1 \cdot xy}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{y}{(x+y)} + \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x}{(x+y)} + \frac{x(x+y) - 1 \cdot xy}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x}{(x+y)} + \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

$\therefore$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1 + \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$$

$$= 1 + \frac{(x+y)^2 - 2xy}{(x+y)^2}$$

$$= 2 - 2 \cdot \frac{xy}{(x+y)^2}$$

$x, y > 0$ より,

$$x+y \geqq 2\sqrt{xy} \quad \therefore \quad \frac{1}{4} \geqq \frac{xy}{(x+y)^2}$$

$$\therefore \quad 2 - 2\frac{xy}{(x+y)^2} \geqq 2 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geqq \frac{3}{2}$$